

А. С. Карпенко

РАЗВИТИЕ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^n ((\neg x_1 \& \dots \& \neg x_{i-1} \& \neg x_{i+1} \& \dots \& \neg x_n) \Rightarrow \perp x_i) \right\}$$

$n = 2, 3, 4, 5, \dots$

$$\perp x =_{df} x \vee \neg x$$



URSS

Карпенко Александр Степанович

Развитие многозначной логики. Изд. 3-е, перераб. и доп.
М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 448 с.

В настоящей книге рассматривается развитие многозначной логики начиная от Аристотеля и до наших дней. В силу той особой роли, которую играет многозначная логика в компьютерных науках и в различных приложениях, большое внимание в работе уделяется ее теории функциональных свойств. Автор особо выделяет также сложнейшую философскую проблему интерпретации истинностных значений, которая в итоге приводит к идее их структурализации. Книга может служить справочником по многозначной логике, поскольку в ней тщательно соблюдается хронология развития многозначной логики, содержится большой список использованной литературы; к тому же она не предполагает наличия у читателя каких-либо предварительных знаний.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей, в том числе философов, логиков, математиков и студентов соответствующих специальностей.

Karpenko Alexander Stepanovich

The Development of Many-Valued Logics. — М.: LKI Publishers, 2010. — 448 p.

The book covers the development of many-valued logics from Aristotle up to the present. As many-valued logics play an important role in computer science and other applications, an emphasis is placed on functional properties of many-valued logics. Another important topic covered in the book is the more complicated philosophical problem of interpretation of the truth values in many-valued logics; investigating this problem leads to the idea of structuralization of truth values.

The book can serve as chronologically organized a source of reference on many-valued logics with a substantial bibliography on the subject. The book does not assume any prior knowledge of any area of logic and is aimed at everyone interested in the subject.


2-е издание выходило под заглавием «Многозначные логики»

Издательство ЛКИ, 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 28. Зак. № 722.

Отпечатано в ООО «ПК «Зауралье». 640022, Курганская обл., Курган, ул. К. Маркса, 106.

ISBN 978-5-382-01217-9

© Издательство ЛКИ, 2010

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете:
	http://URSS.ru
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
URSS	Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

4863 ID 113227



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

*Посвящается моему Учителю,
Владимиру Александровичу Смирнову,
который хотя и не был многозначником,
но был блестящим логиком
и, самое главное, прекрасным человеком*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная многозначная логика является исключительно разветвленной областью символической логики по своему применению, развитию и проблематике. Среди различных неклассических направлений в логике многозначная логика занимает особое место по следующим причинам. Во-первых, в силу своего применения в совершенно различных областях самой неклассической логики. В некотором смысле можно говорить об универсальности и наибольшей общности, достигнутой в многозначной логике, что обеспечивается весьма мощным техническим аппаратом, средства которого играют важную роль в решении внутренних проблем неклассических логик. Во-вторых, особая значимость конечнозначных логик связана с применением в теории релейно-контактных схем, в исследовании проблем искусственного интеллекта и в теоретическом программировании, а также связана с тем, что они позволяют описывать работу самых различных реальных вычислительных устройств и автоматов. В-третьих, широкое использование в математике: математический анализ «нечеткости» (fuzzy) и аппроксимирующих рассуждений, построение различных моделей для теорий множеств, используя подходящие системы многозначной логики, доказательство независимости систем аксиом. Наконец, многозначная логика используется в лингвистике и философии. Найдено применение к решению различных парадоксов, пересмотрена теория истины А. Тарского (см. раздел 5.4.6.2). Подчеркнем, что само возникновение первой системы многозначной логики мотивировано чисто философской проблематикой, а именно опровержением фаталистического аргумента Аристотеля.

Наиболее важные применения многозначной логики рассмотрены в книге С. Готтвальда [Gottwald 2001, Part IV]. Впечатляющий список современного применения многозначной логики приведен в [Baaz, Fermüller and Salzer 2001: 1357]. О применении трехзначных логик см. ниже раздел 3.7.

Эти обстоятельства и целый ряд других факторов способствуют тому, что многозначная логика весьма интенсивно развивается, внося тем самым коррективы в само понимание предмета многозначной логики, и уже сейчас это понимание требует глубокого осмысления. Поскольку изучение матричных логик Лукасевича и Поста наряду с алгеброй логики Буля (двузначная логика) явилось основой для создания теории многозначной логики, то им будет уделено специальное внимание.

В первой главе дается элементарное изложение классической логики. Более подробно рассмотрены свойства классической логики высказываний, для того, чтобы с ними можно было сравнивать свойства многочисленных трехзначных логик.

Вторая глава посвящается интуитивному пониманию многозначной логики и ее возникновению. Рассмотрены два источника появления многозначной логики: доказательство независимости аксиом пропозициональной классической логики S_2 и опровержение фаталистического аргумента Аристотеля.

Трехзначные логики рассматриваются в третьей главе. Основное внимание уделено существенным различиям между классической двузначной логикой и трехзначными логиками, главными из которых являются логика Я. Лукасевича, логика Д.А. Бочвара, логика А. Гейтинга, логика С. Клини и паранепротиворечивая логика Батенса-Розоноэра. Изучаются различные их взаимоотношения. Взаимоотношение некоторых паралогик представлено решеткой В.М. Попова. Специальное внимание уделено трехзначным изоморфам S_2 . Рассматривается также промежуточная регулярная логика Клини, обладающая весьма необычными свойствами. Вводится понятие p -логики. Обращается внимание на применение трехзначной логики для решения логико-философских проблем квантовой механики. В конце ставится важная методологическая проблема: являются ли трехзначные логики ограничением S_2 или ее расширением? Глава завершается интересным результатом Н.Е. Томовой, где строится *решетка* импликативных расширений регулярных логик Клини, в которой появляются совершенно *новые* трехзначные логики. Подчеркнем, что уже трехзначные логики являются той главной лабораторией, которая позволяет погрузиться в мир многозначных логик.

В четвертой главе вводятся понятия логической матрицы, нормальной матрицы, характеристической матрицы. Вводится определение *матричной семантики*. Дается определение операции прямого умножения матриц и в качестве примера умножается матрица для классической двузначной логики сама на себя. Также вводится

операция добавления к матрице нового элемента, а затем рассматривается комбинирование этих двух операций над матрицами, что приводит в итоге к построению характеристической матрицы для интуиционистской логики. В этой же главе вводятся необходимые понятия теории (логических) решеток, дающие элементарное представление об алгебраических свойствах различных многозначных логик, в алгебраической основе которых, как правило, лежат дистрибутивные решетки, алгебры де Моргана и алгебры Клини. Отдельный класс логик характеризуется квази-решетками. Дается характеристика алгебры Буля, приводятся ее примеры, наиболее важным из которых является алгебра Линденбаума, и вводятся другие "логические" алгебры, такие как алгебры Гейтинга, алгебры Брауэра, дважды алгебры Гейтинга, симметрические алгебры Гейтинга, p -алгебры. Вводятся такие новые понятия как, *промежуточная решетка*, *некоммутативная алгебра Клини*, *промежуточная p -алгебра*, *слабая p -алгебра* и для двух последних их формулировки с приставкой "дважды". Поясняется, что понимается под *алгебраической семантикой* и в чем состоит развитие алгебраической логики. Специальное внимание уделено трехэлементным алгебрам Лукасевича.

В пятой главе происходит обобщение трехзначных логик на конечнозначный случай. Несомненно, самым интересным классом конечнозначных логик является класс логик Лукасевича L_n . Этим логикам уделяется особое внимание (см. также гл. 7). Здесь подробно исследуются их свойства, приводится аксиоматизация и алгебраизация L_n . Рассматриваются также другие конечнозначные логики: Гёделя G_n , Лукасевича–Мойсила, Бочвара B_n , паранепротиворечивые. Здесь же вводятся и исследуются логики Поста P_n , являющиеся фундаментом в различных технических приложениях. Также в этой главе впервые в отечественной литературе систематически рассматриваются четырехзначные логики. Важным является результат Н.М. Ермолаевой и А.А. Мучника о расширениях четырехзначной классической логики и построении решетки этих расширений. Особое внимание уделяется четырехзначной логике Белнапа и ее расширениям соответствующими импликациями. В связи с логикой Белнапа дается краткий обзор по бирешеткам и их обобщениям. Предлагается пропозициональный базис (логика Tr) для построения новой теории истинности и устанавливается связь с проблемой логического фатализма.

Главной темой шестой главы является рассмотрение метода аксиоматизации конечнозначных (предикатных) логик, предложенного О.М. Аншаковым и С.В. Рычковым. При этом широкий класс

наиболее известных многозначных логик аксиоматизируется как расширение классической логики.

Седьмая глава является центральной по своей значимости, в которой многозначная логика предстает в виде *функциональной системы*. Вначале вводится операция суперпозиции, а затем на множестве всех подмножеств множества n -значных функций определяется оператор замыкания, посредством которого вводятся понятия замкнутого класса функций, базиса, функциональной полноты и предполноты. Рассмотрен критерий функциональной полноты для конечнозначных логик. Выявлены принципиальные различия между классической (двухзначной) логикой и произвольной конечнозначной логикой, главным из которых является переход от счетного множества замкнутых классов функций к континуальному множеству замкнутых классов за счёт добавления только одного нового истинностного значения. Обсуждается вопрос *критерия счетности/континуальности* для трехзначных логик. Уделено внимание функциональным свойствам конечнозначных логик Лукасевича, которые удивительным образом оказались связанными со свойствами простых чисел (теорема В.К. Финна). Следствия из этого открытия оказались совсем неожиданными: структурализация простых чисел в виде корневых деревьев; построение такой логики K_{n+1} , которая имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число; штрих Шеффера для простых чисел; алгоритм порождения классов простых чисел.

Восьмая глава посвящена бесконечнозначным логикам, важнейшей из которых является логика Лукасевича L_∞ . Кроме этого рассматриваются интуиционистская логика Int и некоторые суперинтуиционистские логики, например, логика Гёделя–Даммита G_∞ . Представляет интерес синтез логик L_∞ и G_∞ . Кроме этого, уделено внимание основным льюисовским модальным системам, релевантной логике R и родственной ей логике RM , иерархии паранепротиворечивых логик H да Косты C_n . Рассматривается алгебраизация L_∞ , семантика Крипке для Int и обсуждается вопрос о переходе к неистинностно-функциональной семантике в связи с паранепротиворечивыми логиками. Отмечается тенденция современного развития логики, направленная на изучение целых классов логик, а также появление методов для комбинирования совершенно различных систем логик.

Девятая глава посвящена теории нечетких множеств и нечетким логикам. Обращается внимание на понятие *нечеткозначной* логики и на алгебру нечетких истинностных значений типа 2. Строится иерархия нечетких алгебр. Нечеткая логика рассматрива-

ется как в широком смысле (теория нечетких множеств), так и в узком смысле. В последнем случае выделяется родственный класс бесконечнозначных логик, основанный на t -нормах. Рассматривается базисная (предикатная) логика Хаека **VL** и ее расширения.

В десятой главе исследуется на сегодняшний день сложнейшая проблема теории многозначных логик, а именно проблема интерпретации истинностных значений. Обсуждается тезис Сушко о том, что каждая логика является двузначной. Приводится его критика. Тем не менее, оказывается, что весьма широкий класс конечнозначных логик можно проинтерпретировать только в терминах классических истинностных значений: Т (истина) и F (ложь). Рассматривается разработанная автором так называемая *факторсемантика* для таких логик и определены границы ее применения. Здесь в качестве истинностных значений высказываниям приписываются определенные подмножества Т- F -последовательностей (подмножества булевых векторов). Отсюда возникла идея о *структуризации* истинностных значений. Главный вывод: *логика есть наука об истинностных значениях*.

В качестве Приложения будут представлены конечные булевы решетки наиболее важных импликативных и импликативно-негативных логик. Для их построения существенно используется аппарат многозначных логик, а именно метод доказательства независимости аксиом, рассмотренный нами в разделе 2.3. В последнем разделе книги обсуждаются проблемы классификации логик. Констатируется, что современный этап развития логики характеризуется тем, что логика превращается в *науку о конструкциях логик*.

Метод изложения материала концентрический, т. е. вначале дается интуитивное и неформальное понимание тех или иных понятий, которые впоследствии уточняются. В первую очередь это относится к самому определению многозначной логики.

Вопрос о библиографии по многозначным логикам заслуживает специального рассмотрения. Литература здесь совершенно необозрима и, по-видимому, имеет тенденцию к экспоненциальному росту.

Первой и давно ставшей классической работой по многозначной логике является монография Дж. Россера и А. Тюркетта [Rosser and Turquette 1952], переизданная в 1958 г. Следующая книга принадлежит А.А. Зиновьеву [Зиновьев 1960] (переведена на английский язык в 1963 г.). В исправленном и переработанном виде вышла большой статьей в сборнике (см. [Зиновьев 1968]). Новый вариант остался практически неизвестным, тем более что к этому времени вышла книга Р. Аккерманна [Ackermann 1967], а затем

весьма обстоятельная (значительно превосходящая по объему материала все три предыдущих книги вместе взятые), с философским содержанием и с хорошо разработанной библиографией, монография Н. Решера [Rescher 1969]. Эта книга оказала большое влияние на развитие многозначной логики во всем мире. Отметим также книгу на румынском языке [Dumitriu 1971] и книгу на немецком языке [Gottwald 1989]. Компактным введением в многозначную логику является монография Г. Малиновского [Malinowski 1993] (см. также [Malinowski 2006]). Теория многозначных логик изложена в [Bolc and Borowik 1992]¹ и их формально-логическое применение в [Bolc and Borowik 2000]. Обратим внимание на очень полезную и разностороннюю книгу С. Готтвальда [Gottwald 2001] (английский вариант предыдущей книги), содержащую доказательства основных результатов в многозначной логике. При необходимости мы даем соответствующие ссылки на эту книгу. Имеется также книга [Bergmann 2008], рассматривающая в основном трехзначные и бесконечнозначные логики.

Имеется большой обзор по многозначной логике Р. Вольфа [Wolf 1977], где библиография Решера дополнена и доведена до 1974 г. Подробная библиография была составлена в Японии: часть I — 60-е годы [Miyama 1979] и часть II — с 1970 г. по 1974 г. [Miyama 1980]. Отметим также обзор А. Роуза [Rose 1981] и более современный обзор А. Уркварта [Urquhart 1986]². См. также [Béziau 1997], [Panti 1998] и [Malinowski 2002]. Нынешнее состояние дел в многозначной логике (для специалистов) представлено в обзоре Р. Хэнли [Hähnle 2001]³. Стоит также отметить статью С. Готтвальда, написанную для известной электронной «Стэнфордской Философской Энциклопедии» [Gottwald, 2004] и его же обзор для фундаментального труда «Философия логики» [Gottwald 2007].

Важнейшим и основным источником современной литературы по многозначным логикам и в особенности их применению и различным приложениям служат материалы ежегодного международного симпозиума по многозначной логике (*International Symposium on Multiple-Valued Logic*), которые проводятся начиная с 1971 г. В материалах 9-го симпозиума [Ginser and Butler J.T. 1979] содержится библиография по многозначной логике начиная с середины

¹ На целый ряд неточностей указано в [Hájek and Zach 1994].

² См. критические замечания А. Вроньского [Wroński 1987]. Исправленный вариант опубликован в [Urquhart 2001].

³ Его обновленный вариант современной библиографии с указанием различных ресурсов можно найти на сайте <http://www.cs.chalmers.se/~reiner/mvl-web/>.

1974 г. по апрель 1978 г. Она дополняет библиографию по многозначной логике, имеющей применение в вычислительной технике [Epstein, Frieder and Rine 1974], и библиографию, помещенную в хронологическом обзоре по логическим функциям для цифровых вычислительных систем [Rine 1977]. Обзоры и литература по специальным техническим разделам применения многозначной логики к компьютерным наукам имеются в трудах 16-го [Hurst 1986], 18-го [Hurst 1988] и 21-го [Moraga 1991] симпозиумов. В материалах 22-го симпозиума [Butler S. and Butler J. 1992] дается обзор и анализ работы первых 21 симпозиумов и приводятся различные статистические данные. Указанные авторы разработали также базу данных статей, авторов и тем.

Существует своего рода справочник по теории и применению многозначной логики к компьютерным наукам [Rine (ed.), 1977; 1984], получивший широкое распространение. Ряд статей книги носит характер обзоров по специальным разделам самой многозначной логики. Во втором издании этой книги (1984), значительно дополненном, имеется обзор (pp. xvi-xxxiv) по применению многозначной логики к цифровым вычислительным системам. Обзор охватывает период с 1952 по 1983 г. и разбит на семь разделов. Здесь можно найти работы об использовании многозначной логики в качестве языка при проектировании нового поколения ЭВМ. См. также обзоры в [Hurst 1984] и [Smith 1988]. Хорошее введение в теорию многозначных релейно-контактных схем содержится в монографиях [Muzio and Weselkamper 1986] и [Epstein 1993]. См. также [Sasao 1999]. Заметим только, что уже в 1958 г. в Московском государственном университете им М.В. Ломоносова был сконструирован первый трехзначный компьютер под названием «Сетунь» (см. [Брусенцов и др. 1965]).

Общим вопросам теории и применения многозначной логики посвящен сборник статей [Fitting and Orłowska (eds.), 2003]. Современное техническое использование и применение многозначной логики рассмотрено в монографии [Miller and Thornton 2007].

Дедуктивным аспектам многозначной логики посвящены монографии Р. Хэнли [Hähnle 1994] и З. Стачняка [Stachniak 1996]. Философские аспекты обсуждаются в [Зиновьев 1960], [Rescher 1969], [Нааск 1974; Нааск 1996]. Современный подход к нечеткой логике разработан в [Hájek 1998]. Здесь же дается краткий исторический экскурс развития многозначной логики (гл. 10).

Стоит обратить внимание на феномен многозначных логик Лукасевича, интерес к которым по прошествии многих лет только возрастает. В монографии [Cignoli, D'Ottaviano and Mundici 2000]

исследуются алгебраические свойства бесконечнозначной логики Лукасевича, которая представляет для этого исключительно богатый материал, а в монографии [Карпенко 2000] (см. также [Karpenko 2006]) исследуются функциональные свойства конечнозначных логик Лукасевича, следствия из которых оказались совсем неожиданными (см. ниже раздел 7.6). Отметим также книгу «Лукасевич и современная логика» [Baghratian and Simons 2000x].

Стоит отметить также отечественные работы, имеющие вводный характер: [Гиндикин 1972, § 11] и [Гаврилов и Сапоженко 1977, гл. 3], а также статьи в энциклопедиях: [Зиновьев 1964], [Кудрявцев 1982] и [Карпенко 2001a]. Большим событием явилось переиздание работ Д.А. Бочвара, его учеников и последователей. См. [Финн (ред.), 2008a; 2008b].

Настоящая книга является существенно переработанным и значительно расширенным вариантом книги [Карпенко 1997]. Работы В.К. Финна (см. список использованной литературы), связанные с функциональными свойствами многозначных логик и взаимоотношением трехзначных логик, оказали решающее влияние на выбор многозначной логики, как основного направления в логических исследованиях.

Данная книга может служить справочником по многозначной логике с тщательным соблюдением хронологии ее развития и с большим списком использованной литературы. Причем в силу той особой роли, которую играет теория функциональных свойств многозначных логик в компьютерных науках и в различных приложениях, основное внимание будет уделено пропозициональным логикам. Главное здесь то, что средств пропозиционального языка часто бывает достаточно, чтобы выявить наиболее существенные и принципиальные отличия многозначной логики от классической двузначной логики. На сегодняшний день наиболее полное рассмотрение теории предикатных многозначных логик можно найти в монографии С. Готтвальда [Gottwald 2001].

Книга написана на основе специальных курсов, читавшихся в течение ряда лет на философском факультете Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова, студентам, специализирующимся по логике. Книга рассчитана на самый широкий круг читателей и не предполагает никаких предварительных знаний.

Автор благодарен В.М. Попову за ряд критических замечаний, высказанных в разное время, и В.И. Шалаку, высказанных при обсуждении книги, а также Л.Ю. Девяткину и Н.Е. Томовой за техническую поддержку.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1.1. Логические связки. Истинностные таблицы

Логика высказываний (пропозициональная логика) является разделом современной символической логики, изучающим сложные высказывания, образованные из простых, и их взаимоотношения. В отличие от логики предикатов простые высказывания при этом выступают как целостные образования, внутренняя структура которых не рассматривается, а учитывается лишь то, с помощью каких союзов и в каком порядке простые высказывания сочленяются в сложные. Под высказыванием понимается то, что выражается повествовательным предложением.

В естественном языке существует много способов образования сложных высказываний из простых. Мы выберем пять общеизвестных грамматических связок (союзов): «не», «и», «или», «если..., то» и «тогда и только тогда, когда». Процесс символизации (формализации) естественного языка средствами логики высказываний состоит в следующем. Простые высказывания замещаются *пропозициональными переменными* p, q, r, \dots с индексами или без них; указанные выше грамматические связки называются *логическими связками* (пропозициональными связками), которые соответственно получили следующие обозначения и названия: \neg (отрицание), \wedge или $\&$ (конъюнкция), \vee (дизъюнкция), \supset (импликация) и \equiv (эквиваленция); и, наконец, используются скобки $()$, (для того, чтобы можно было по-разному группировать высказывания и тем самым определять порядок выполнения операций. Отрицание является одноместной связкой, а остальные четыре — двухместными. Таким образом, мы определили *пропозициональный язык*, который обозначим посредством \mathcal{L} . Как увидим далее, исходное множество логических связок может значительно варьироваться и включать в себя также пропозициональные константы, представляющие отдельные истинностные значения.

Выражением языка логики высказываний будем называть любую последовательность указанных выше символов. Некоторые из этих выражений являются правильно построенными. Такие выражения называются *формулами*, определение которых задается следующими правилами, где буквы A, B, C, \dots с индексами или без них используются как метапеременные для обозначения

произвольных формул: (1) всякая пропозициональная переменная есть формула; (2) если A и B — формулы, то $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \equiv B)$ тоже формулы; (3) никакие другие выражения не являются формулами. Примерами формул являются p , $\neg q$, $\neg(p \vee q)$. Внешние скобки при записи формул будем опускать. Таким образом, правила задают эффективный способ распознавания, является ли выражение логики высказываний формулой. Множество всех формул обозначим посредством For .

Теперь сделаем два основных допущения, на которых основывается семантика классической логики высказываний:

- (I) Каждое простое высказывание является или истинным, или ложным (принцип двужначности). «Истина» и «ложь» называются *истинностными значениями* высказывания и обозначаются соответственно И и Л или 1 и 0.
- (II) Истинностное значение сложного высказывания определяется только истинностными значениями составляющих его простых высказываний (принцип экстенциональности). Это означает, что пропозициональные связки являются знаками *истинностных функций*.

Возникает вопрос, какие истинностные функции соответствуют нашим логическим связкам?

Удобным способом задания истинностных функций является табличный, где слева указываются все возможные приписывания значений аргументам (пропозициональным переменным), а справа — значения самой функции:

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \supset q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1

Отсюда, например, следует, что высказывание $p \supset q$ ложно тогда и только тогда, когда (т.т.т., когда) p истинно и q ложно. Приведенные выше таблицы называются *истинностными таблицами*, а определенные посредством их пропозициональные связки называются *классическими связками*.

Легко определить, сколько имеется различных классических связок. Число различных строк в таблице для истинностной функции с m аргументами равно 2^m и на каждой из них значение функции можно задать двумя способами: 1 или 0. Поэтому число таких функций составляет 2 в степени 2^m . Отсюда, например, число одноместных связок равно 4, а число двухместных связок равно 16.

Каждая формула логики высказываний реализует некоторую истинностную функцию, которая графически может быть представлена истинностной таблицей. Другими словами, каждая формула может быть представлена как функция, у которой как переменные, так и сама функция, принимают значения из множества $\{0, 1\}$. Такие функции называются *булевыми функциями* в честь одного из создателей символической логики Дж. Буля (1815–1864).

1.2. Законы логики высказываний

Среди всего множества формул выделяются формулы, которые на каждой строке истинностной таблицы принимают только значение 1, т.е. соответствующие им булевы функции тождественно равны 1. Такие формулы называются *тавтологиями* (тождественно истинными высказываниями). Таким образом, тавтология — это формула, которая истинна независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные.

В формальной логике тавтологии играют важную роль. Они служат для записи ее законов, так как тавтологии являются всегда истинными высказываниями только в силу своей символической формы, независимо от содержания входящих в них исходных высказываний. Легко установить, что формулы

$$(1) p \supset p,$$

$$(2) p \vee \neg p,$$

$$(3) \neg(p \wedge \neg p)$$

являются тавтологиями. Законы, выражаемые этими формулами, называются соответственно *законом тождества*, *законом исключенного третьего* и *законом (не)противоречия* и были сформулированы уже Аристотелем. Использование этих законов в качестве ограничений на допустимые способы рассуждений привело к тому, что они были названы *основными законами мышления*. Наиболее распространенной формулировкой закона исключенного третьего является следующая: *одно из утверждений p или $\neg p$ должно быть истинным*. Эта формулировка получила в схоластической логике название *tertium non datur*. Закон

непротиворечия формулируется следующим образом: *два взаимно противоречащих высказывания не могут быть одновременно истинными*. Последний закон формулируется у Аристотеля прежде всего как универсальный принцип бытия, наиболее достоверный из всех начал. Однако уже на заре XX в. еще до того, как окончательно оформилась классическая логика, оба эти закона подверглись серьезной критике, что положило начало развитию неклассических логик. В связи с трехзначной логикой Лукасевича мы к этим законам ещё вернемся, а сейчас дополним список законов классической логики:

$$(4) \quad \neg\neg p \equiv p \quad (\text{закон двойного отрицания})$$

$$(5) \quad (p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p) \quad (\text{закон контрапозиции})$$

$$(6) \quad p \supset (\neg p \supset q) \quad (\text{закон Дунса Скота}).$$

Особое место среди законов занимают чисто импликативные тавтологии:

$$(7) \quad p \supset (q \supset p) \quad (\text{закон утверждения консеквента})$$

$$(8) \quad (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)) \\ (\text{закон самодистрибутивности})$$

$$(9) \quad (p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)) \\ (\text{закон сильной транзитивности})$$

$$(10) \quad (p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q) \quad (\text{закон сокращения})$$

$$(11) \quad (p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r)) \quad (\text{закон перестановки})$$

$$(12) \quad ((p \supset q) \supset p) \supset p \quad (\text{закон Пирса}).$$

Точно так же выделяются формулы, которые принимают значение 0 независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные. Такие формулы называются *противоречиями* (тождественно-ложными формулами). Примерами противоречий являются следующие формулы:

$$p \wedge \neg p, \quad p \equiv \neg p.$$

И вообще, из свойств связки отрицания следует, что отрицание тавтологии есть противоречие.

Обратим внимание на исключительно важное свойство истинностных таблиц: они дают нам эффективную процедуру для решения вопроса о том, является ли данная пропозициональная формула тавтологией (противоречием). Указанная процедура называется *разрешающей процедурой*, поэтому данная логика высказываний является *разрешимой логикой*.

Приведем некоторые важные факты о тавтологиях настолько общих, что они лежат в основании правил вывода: *modus ponens* (отделения), *подстановки* и эквивалентной замены.

1. Если A и $A \supset B$ есть тавтологии, то B – тавтология.
2. Если p переменная, то из A следует $A[p/B]$, где $A[p/B]$ есть формула, являющаяся результатом *подстановки* формулы B вместо каждого вхождения переменной p в A .
3. Если $A \equiv B$ есть тавтология, то $C(A) \equiv C(B)$ тоже тавтология, где $C(A)$ – формула, содержащая некоторую формулу A в качестве своей составной части, и $C(B)$ – формула, полученная из $C(A)$ *заменой* этой составляющей A на формулу B .

1.3. Функциональная полнота. СДНФ

Будем называть формулы A и B *эквивалентными* (равносильными), если формула $A \equiv B$ есть тавтология. Очевидно, что если формулы A и B эквивалентны, то сопоставленные им истинностные таблицы совпадают, т.е. реализуют одну и ту же булеву функцию.

Назовем систему пропозициональных связок \mathcal{M} *полной*, если всякая истинностная функция представима некоторой формулой, в которую входят только связки из системы \mathcal{M} , т.е. посредством такой системы можно выразить все истинностные функции (в данном случае, все булевы функции). Используя свойства логической эквивалентности, можно показать, что в классической логике каждая логическая связка может быть определена в терминах \neg , \wedge , \vee , т.е. система пропозициональных связок $\{\neg, \wedge, \vee\}$ является функционально полной. Более точно, для каждой истинностной функции $*$ можно найти такую формулу C , использующую только связки \neg , \wedge , \vee , что истинностные таблицы для $*$ и C одни те же.

Теорема о функциональной полноте. В классической логике высказываний каждая истинностно-функциональная связка может быть определена в терминах \neg , \wedge , \vee (см., например, [Мендельсон 1984: 31-32]).

Отметим некоторые эквивалентности, показывающие взаимовыразимость одних связок через другие:

$$p \vee q \equiv \neg p \supset q, \quad p \vee q \equiv (p \supset q) \supset q, \quad p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q);$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \supset \neg q), \quad p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q);$$

$$p \supset q \equiv \neg p \vee q, \quad p \supset q \equiv \neg(p \wedge \neg q);$$

$$(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \wedge (q \supset p).$$

Тогда системы связок $\{\neg, \supset\}$, $\{\neg, \vee\}$ и $\{\neg, \wedge\}$ являются функционально полными. Это значит, что мы можем строить логику высказываний, взяв в качестве исходной (базисной) любую из указанных систем связок.

Обратим внимание, что посредством правила замены можно преобразовывать формулы, получая другие, им эквивалентные, в более простые (содержащие меньше пропозициональных связок и переменных). Также обратим внимание, что некоторые эквивалентности выражают основные свойства пропозициональных связок. Например, эквивалентности $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ и $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ выражают коммутативный закон связок конъюнкции и дизъюнкции.

Важно то, что для решения определенного рода задач, например, задач о функциональной полноте или разрешимости, всегда можно привести формулу к некоторому каноническому виду, называемому *нормальной формой*. Существует несколько "нормальных форм" формул логики высказываний. Вначале рассмотрим совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ).

Для пропозициональных переменных p_1, \dots, p_n , входящих в формулу F , будем называть *элементарной конъюнкцией* $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, в которой A_i есть p_i или $\neg p_i$. Формула $F(p_1, \dots, p_n)$ находится в СДНФ, если она имеет вид дизъюнкции $B_1 \vee \dots \vee B_m$, где каждое B_j является элементарной конъюнкцией переменных p_1, \dots, p_n . Например, СДНФ для формулы $p \supset q$:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Имеют место следующие факты, связанные с СДНФ:

а) Каждую не тождественно ложную формулу логики высказываний можно представить в виде эквивалентной ей СДНФ. Отсюда следует функциональная полнота множества связок $\{\neg, \wedge, \vee\}$;

б) Это представление в виде СДНФ единственно;

в) Если СДНФ формулы F содержит в точности n пропозициональных переменных, то формула F является тавтологией т.т.т., когда ее СДНФ состоит из 2^n дизъюнктивных членов. Отсюда следует разрешимость классической логики высказываний.

1.3.1. Полиномы Жегалкина

Представляет интерес еще один класс нормальных форм, названный *полиномами* (многочленами) *Жегалкина* [Жегалкин

1927], которые были предложены в качестве удобного средства для представления булевых функций.

Рассмотрим на множестве классических истинностных значений $\{0, 1\}$ арифметические операции. Арифметическое умножение \cdot совпадает с конъюнкцией \wedge , но арифметическое сложение $+$ выводит за пределы множества $\{0, 1\}$. Однако можно взять сложение по модулю 2 (равное остатку от деления на 2). В результате получаем булеву функцию, которую обозначим посредством \oplus :

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Заметим, что $p \oplus q$ можно выразить в виде $\neg(p \equiv q)$. В свою очередь,

$$p \vee q \equiv p \oplus q \oplus (p \wedge q),$$

$$\neg p \equiv p \oplus 1.$$

Применяя эти две формулы, любую формулу классической логики высказываний можно представить через связки \wedge , \oplus и константу 1, причем p^n есть p при $n \geq 1$ и $p \oplus p \equiv 0$ (теорема Жегалкина).

Например, полином Жегалкина для формулы $p \supset q$:

$$(p \wedge q) \oplus p \oplus 1.$$

К СДНФ и полиному Жегалкина мы вернемся при изучении функциональных свойств n -значных логик (см. гл. 7).

Изучение свойств логических связок, их систематизация и выделение основных равносильностей приводит к формированию понятия *алгебры Буля* (см. раздел 4.4.1). Все эти и другие вопросы, включая свойства булевых функций, изучает *алгебра логики* (см. [Кузнецов 1960], [Гиндикин 1972], [Марченков 2002]).

1.3.2. Штрих Шеффера

В классической логике существуют две истинностно-функциональные связки, каждая из которых образует функционально полную систему. Первая из них называется *штрих*

(функция) *Шеффера* и обозначается посредством $|$ (1913 г.): высказывание $p|q$ истинно т.т.т., когда неверно, что p и q оба истинны, т.е. $p|q \equiv \neg(p \wedge q)$ (антиконъюнкция). Тогда $\neg p \equiv p|p$, $p \wedge q \equiv (p|q) | (p|q)$. Другая связка называется *стрелка Пирса* и обозначается посредством \uparrow : высказывание $p\uparrow q$ истинно т.т.т., когда неистинно p и неистинно q , т.е. $p\uparrow q \equiv \neg(p \vee q)$ (антидизъюнкция). Тогда $\neg p \equiv p\uparrow p$, $p \vee q \equiv (p\uparrow q) \uparrow (p\uparrow q)$.

Таким образом, для того чтобы показать, что какая-то связка является аналогом штриха Шеффера, надо (i) определить ее посредством исходных связок, а затем (ii) посредством ее определить сами исходные связки. Некоторые аналоги штриха Шеффера и стрелки Пирса нам понадобятся в последующем.

1.4. Логическое следование. Аксиоматизация.

Адекватность

Наряду с понятием тавтологии фундаментальным для логики является понятие *логического следования*, которое является некоторым отношением, заданным на множестве формул. Говорят « B логически следует из A или является логическим следствием из A » и пишут $A \models B$, если в совместной таблице истинности для A и B формула B имеет значение 1 во всех тех строках, где A имеет значение 1. Отсюда следует, что $A \models B$ т.т.т., когда $A \supset B$ есть тавтология. Если формула A является тавтологией, то иногда пишут $\models A$. Приведенное определение логического следования без труда может быть расширено на некоторую систему формул Γ , и тогда пишут $\Gamma \models B$. Дадим *стандартное* (классическое) определение логического следования, которое восходит к работе А. Тарского 1936 г. (см. [Tarski 1983: 417]): *Формула B логически следует из множества формул Γ т.т.т., когда при любом приписывании значений переменным в составе Γ и B , при котором все формулы из Γ принимают значение «истина», формула B также принимает значение «истина»*. Приведем следующий пример логического следования из посылок: $p, p \supset q \models q$. Отметим также, что в силу приведенного выше табличного определения импликации получаем, что тождественно истинная формула A логически следует из любой системы формул, а из противоречия следует любая формула A .

Если определено понятие тавтологии и определено семантическое понятие логического следования (как это сделано выше), то говорят, что дано *семантическое представление* логики высказываний, а сама логика высказываний зачастую отождествляется с множеством тавтологий или с самим отношением логического

следования. Однако при этом возникает следующая серьезная проблема: как обозреть все тавтологии, которых бесконечное множество? Для решения этой проблемы переходят к синтаксическому представлению логики высказываний.

В рамках синтаксического подхода формальный (символический) язык логики высказываний и понятие формулы остаются прежними, а из всего множества тавтологий выбирается некоторое их конечное подмножество, элементы которого называются *аксиомами*. Наиболее известным является следующее множество аксиом [Клини 1957: 77]:

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
3. $(p \wedge q) \supset p$
4. $(p \wedge q) \supset q$
5. $p \supset (q \supset (p \wedge q))$
6. $p \supset (p \vee q)$
7. $q \supset (p \vee q)$
8. $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$
9. $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset (\neg p))$
10. $\neg \neg p \supset p$.

Таким образом, мы задали аксиоматическое определение логических связок \neg , \wedge , \vee , \supset в отличие от табличного при семантическом описании логики высказываний. Как обычно, $p \equiv q$ означает $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$.

Переход от формулы или множества формул к формуле осуществляется с помощью следующих правил:

R1. Из A и $A \supset B$ следует B (*modus ponens*). Это правило иногда обозначается посредством *MP* и записывается в виде $A, A \supset B \vdash B$.

R2. Из $\vdash A$ следует $\vdash [A p/B]$ (*подстановка*).

Данное правило *подстановки* легко обобщается на случай одновременной подстановки формул B_1, B_2, \dots, B_n вместо различных переменных p_1, p_2, \dots, p_n , входящих в формулу A .¹

¹ Заметим, что каждая аксиоматическая система, которая использует правило подстановки, может быть представлена в виде *схем аксиом*, где вместо пропозициональных переменных используются символы для произвольных высказываний (метаварiable). В этом случае каждая схема аксиом представляет бесконечное множество аксиом (см. более подробно в разделе 4.2)

Так заданную логику высказываний обозначим посредством C_2 и назовем *классической логикой высказываний*.

Логика, заданная посредством некоторого множества аксиом и некоторого множества правил вывода, называется *гильбертовским исчислением* L . Заметим, что существуют также другие типы логических исчислений, эквивалентные данному. Например, генценовские (секвенциальные) исчисления, семантические таблицы Бета, исчисления натурального вывода и др. (см. [Смирнов 1972]). Но для наших целей намного более удобными являются именно гильбертовские исчисления в силу простоты их задания, прозрачности соотношения между семантикой и синтаксисом и, главное, они являются очень удобным инструментом при рассмотрении взаимоотношений одних логик с другими.

Теперь перейдем к описанию того, что есть *доказательство* и что есть *теорема* в исчислении L .

Доказательством в L называется такая конечная последовательность формул A_1, A_2, \dots, A_n , что каждая формула этой последовательности есть либо аксиома, либо получена из некоторых предыдущих формул последовательности по одному из правил вывода. Формула A называется *теоремой* L , если существует доказательство в L , в котором последней формулой является A . Запись $\vdash A$ служит сокращением утверждения « A есть теорема». Если формула A доказуема из некоторого множества Γ исходных формул (посылок), то запись принимает вид $\Gamma \vdash A$ с соответствующей модификацией определения доказательства.

Рассмотрим для примера доказательство в C_2 теоремы $p \supset p$.

1. $(p \supset ((p \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p))$ – подстановка в аксиому (2): вместо $q/p \supset p$ и вместо r/p .
2. $p \supset ((p \supset p) \supset p)$ – подстановка в аксиому (1): вместо $q/p \supset p$.
3. $(p \supset (p \supset p)) \supset (p \supset p)$ – из 1 и 2 по правилу МР.
4. $p \supset (p \supset p)$ – подстановка в аксиому (1): вместо q/p .
5. $p \supset p$ из 3 и 4 по правилу МР.

Таким образом, $\vdash p \supset p$.

В качестве «вспомогательного» правила весьма полезной является *теорема дедукции*, когда какое-нибудь утверждение B

и тогда правило подстановки оказывается излишним. Именно в таком виде дается в [Клини 1957: 77] приведенная выше аксиоматизация, где вместо пропозициональных переменных p, q, r используются метаварьируемые A, B, C . Однако зачастую более удобно пользоваться аксиоматизацией с правилом подстановки, особенно при анализе доказательств.

доказывают в предположении верности другого утверждения A , после чего заключают, что верно утверждение «если A , то B »:

Теорема дедукции. Если Γ — множество формул, A и B — формулы и $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$. В частности, если $A \vdash B$, то $\vdash A \supset B$.²

Исходя из синтаксического представления логики высказываний, последняя зачастую отождествляется с множеством теорем или, что более принято, с отношением выводимости \vdash . Итак, при семантическом подходе формулы интерпретируются как функции на множестве из двух элементов $\{0, 1\}$, и нас интересуют тавтологии и противоречия, а при синтаксическом — как определенный набор символов, и различаются только теоремы и не теоремы. Однако, несмотря на такое различие, оба подхода к построению логики высказываний, по существу, эквивалентны и, как говорят, являются *адекватными* друг другу. Это значит, что понятия логического следования и вывода равнообъемны. Рассмотрим в связи с этим весьма примечательную теорему.

Теорема адекватности. Для всякой формулы A , $\vdash A$ т.т.т., когда $\models A$.³

Доказательство в одну сторону, а именно: для всех A , если $\vdash A$, то $\models A$ — носит название *теоремы о корректности*. Это минимальное условие, которое мы требуем от логического исчисления и которое состоит в том, что представленная нами семантика корректна для выбранной аксиоматизации. Для доказательства теоремы нужно проверить, что все наши аксиомы (1) — (10) являются тавтологиями, что легко устанавливается непосредственной проверкой с помощью истинностных таблиц. А наши правила вывода выбраны таким образом, что они *сохраняют тавтологию* (см. [Чёрч 1960: 92]) в том смысле, что если посылка (или посылки) является тавтологией, то и заключение — тавтология. Поэтому все формулы последовательности, образующей вывод какой-либо теоремы исчисления S_2 , в том числе и сама доказанная теорема, являются тавтологиями. Из этой теоремы следует важнейшее свойство исчисления высказываний S_2 , свойство *непротиворечивости*: не существует формулы A такой, чтобы A и $\neg A$ были теоремами. Согласно теореме о корректности, каждая

² Теорема дедукции называется *стандартной*, если для импликации выполняются свойства утверждения консеквента и самодистрибутивности (см. выше).

³ Теорема адекватности в виде: для всякой формулы A , $\Gamma \vdash A$ т.т.т., когда $\Gamma \models A$ — носит название «строгой теоремы адекватности».

теорема C_2 является тавтологией. Как уже говорилось, отрицание тавтологии не есть тавтология. Следовательно, ни формула A , ни формула $\neg A$ не могут быть одновременно теоремами в C_2 . Противоречивая логика высказываний никакой ценности не представляет. В ней истина и ложь неразличимы.

Имеет место и обратное утверждение о том, что каждая тавтология доказуема, т.е. для всякой формулы A , если $\models A$, то $\vdash A$. Доказательство этой теоремы не столь тривиально и носит название *теоремы о полноте* (дедуктивной) исчисления высказываний относительно предложенной семантики. По существу здесь утверждается, что логических средств, т.е. аксиом и правил вывода исчисления высказываний C_2 вполне достаточно для доказательства всех тавтологий. Таким образом, главная цель достигнута: используя минимальные средства, можно обозреть всё множество тавтологий.

1.5. Историческая справка

Из раздела (1.3) следует, что логику высказываний можно развивать на основе системы связок $\{\neg, \supset\}$. Именно так *впервые* и была представлена аксиоматизация C_2 Г. Фреге в 1879 г. (см. [Фреге 2000]. Она была значительно упрощена Я. Лукасевичем [Łukasiewicz and Tarski 1930: 136]:

1. $p \supset (q \supset p)$
2. $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
3. $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$ (обратная контрапозиция).

Правила вывода: МР и подстановка.

Детально эта аксиоматизация C_2 исследуется А. Чёрчем [Чёрч 1960, гл. 2]⁴.

В терминах современного символического языка аксиоматизация C_2 впервые появилась в «*Principia Mathematica*» А. Уайтхеда и Б. Рассела [Whitehead and Russell 1910-1913], где в качестве исходных связок взяты \neg и \vee . У Фреге и здесь вопрос о полноте просто не возникал. Их целью было показать, что вся логика, а в действительности вся математика, может быть развита внутри их системы, основанной на классической логике. Первая публикация доказательства функциональной и дедуктивной полноты C_2 принадлежит Э. Посту [Post 1921], который исходил из системы

⁴ Нам она понадобится при сравнении C_2 с трехзначной логикой Лукасевича L_3 . В следующей главе мы покажем, что эта аксиоматизация обладает свойством независимости аксиом, что приводит к появлению трехзначных логик.

Уайтхеда и Рассела. Для доказательства теоремы адекватности Пост использовал двужначные истинностные таблицы (приведенные выше). Основы алгебры логики заложены в 1847 г. в работах Дж. Буля и А. де Моргана.

Алгебраические аспекты S_2 рассмотрим в гл. 4.

1.6. Логика предикатов

Изложение этой темы имеется во всех учебниках по современной логике, среди которых одним из лучших является [Мендельсон 1984], которому мы и будем в основном следовать. См. также работу [Hodges 2001], специально посвященную элементарной логике предикатов.

Мы рассмотрим логику предикатов первого порядка, которая характеризуется тем, что имеется только один вид квантифицируемых переменных — предметные (индивидуальные) переменные, возможными значениями которых являются индивиды (числа, люди, города и т.п.).

1.6.1. Язык логики предикатов

Существуют такие виды логических рассуждений, которые не могут быть обоснованы в рамках логики высказываний. Например, «Все люди смертны», «Сократ — человек». Следовательно, «Сократ смертен».

Корректность этого рассуждения покоится не только на истинностно-функциональных отношениях между входящими в них высказываниями, но и на внутренней структуре самих высказываний, а также на понимании таких выражений, как «все», «всякий», «некоторый» и т.д. Поэтому удобно ввести специальные обозначения для определенных часто встречающихся выражений. Если $P(x)$ означает, что x обладает свойством P , то посредством $\forall xP(x)$, будем обозначать утверждение: «все x обладают свойством P ». Запись $\exists xP(x)$ будет обозначать, что «существует предмет x , обладающий свойством P ». В выражении $\forall xP(x)$ часть \forall называется квантором *всеобщности*, а часть \exists в выражении $\exists xP(x)$ называется квантором *существования*. Как отмечается в [Гильберт и Бернайс 1979: 135], в эвристических целях лучше трактовать всеобщность как распространенную на всю индивидуальную область (быть может, бесконечную) конъюнкцию, а существование — как распространенную на всю индивидуальную область дизъюнкцию. Именно такое понимание кванторов часто используется в многозначной логике.

Пусть s обозначает «Сократ», $M(x)$ обозначает « x есть человек», а $D(x)$ обозначает « x смертен». Тогда вышеприведенное рассуждение можно записать следующим образом: из посылок $\forall x(M(x) \supset D(x))$ и $M(s)$ следует $D(s)$. Заметим, что справедливость этого заключения не зависит от того, какой конкретный смысл имеют символы s , M и D .

Язык логики предикатов содержит скобки, символы логики высказываний \neg , \supset , \wedge и \vee , кванторы \forall и \exists , предметные (индивидные) переменные $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, предметные (индивидные) константы $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, предикатные буквы $P_1^1, P_1^2, \dots, P_k^j, \dots$ и функциональные буквы $f_1^1, f_1^2, \dots, f_k^j, \dots$. Верхний индекс предикатной или функциональной буквы указывает число аргументов, а нижний индекс служит для различения букв с одним и тем же числом аргументов. В приведенном выше примере s является предметной константой, а M и D — одноместными предикатными буквами. Функциональные буквы обозначают предметные функции, аргументами и значениями которых являются индивиды, например, «+», «возраст» и т.д.

- (а) всякая предметная переменная или предметная константа есть терм;
- (б) если f_i^n — функциональная буква и t_1, \dots, t_n — термы, то $f_i^n(t_1, \dots, t_n)$ есть терм;
- (с) выражение является термом только в том случае, если это следует из правил (а) и (б).

Предикатные буквы, примененные к термам, порождают элементарные формулы, или точнее: если P_i^n — предикатная буква, а t_1, \dots, t_n — термы, то $P_i^n(t_1, \dots, t_n)$ — элементарная формула.

Формулы исчисления предикатов определяются следующим образом:

- (а) всякая элементарная формула есть формула;
- (б) если A и B — формулы и x — предметная переменная, то каждое из выражений $(\neg A)$, $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\forall x A)$ и $(\exists x A)$ есть формула;
- (с) выражение является формулой только в том случае, если это следует из правил (а) и (б).

Заметим, что \exists можно не включать в число основных символов для квантора существования, так как $\exists x A$ можно

определить как сокращенную запись для $\neg(\forall x(\neg A))$. Также мы знаем, что посредством \neg и \supset можно определить связки \wedge и \vee .

В выражении $(\forall xA)$ « A » называется областью действия квантора \forall по переменной x . Заметим, что A может и не содержать переменной x , в таком случае обычно считается, что содержательный смысл A и $(\forall xA)$ одинаков.

Введем понятия *свободного* и *связанного* вхождения переменной в формулу: вхождение переменной x в данную формулу называется *связанным*, если x является подкванторной переменной входящего в эту формулу квантора \forall или находится в области действия квантора \forall по переменной x ; в противном случае вхождение переменной x в данную формулу называется *свободным*. Заметим, что одна и та же переменная может иметь свободные и связанные вхождения в одну и ту же формулу. Заметим также, что вхождение переменной может быть связанным в той или иной формуле A и в то же время свободным в некоторой подформуле формулы A .

Переменная называется *свободной* (*связанной*) *переменной* в данной формуле, если существуют свободные (связанные) ее вхождения в эту формулу. Таким образом, переменная может быть одновременно свободной и связанной в одной и той же формуле.

Терм t называется свободным для переменной x_i в формуле A , если никакое свободное вхождение x_i в A не лежит в области действия никакого квантора $\forall x_j$, где x_j — переменная, входящая в t .

1.6.2. Интерпретация и аксиоматизация

Формулы имеют смысл только тогда, когда имеется какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Сформулируем наиболее распространенную, теоретико-множественную семантику описанного выше языка логики предикатов первого порядка.

Под *интерпретацией* понимается всякая система, состоящая из непустого множества D , называемого *областью* интерпретации, и какого-либо соответствия, относящего каждой предикатной букве P_j^n некоторое n -местное отношение в D , каждой функциональной букве f_i^n — некоторую n -местную операцию в D (т.е. функцию, отображающую D^n в D) и каждой предметной постоянной a_i — некоторый элемент из D .⁵ При заданной интерпретации

⁵ Всякое n -местное отношение в D может рассматриваться как некоторое подмножество множества D^n всех n -ок элементов из D . Например, если D есть множество людей, то отношение между двумя людьми, состоящее в том, что

предметные переменные пробегают область D этой интерпретации, а связкам \neg , \supset , \wedge , \vee и кванторам придается их обычный смысл.

Для данной интерпретации всякая формула без свободных переменных (или, иначе, *замкнутая формула*) представляет собой высказывание, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными выражает некоторое отношение на области интерпретации; это отношение может быть выполнено (истинно) для одних значений переменных из области интерпретации и не выполнено (ложно) для других.

Например, если мы берем в качестве области D множество целых положительных чисел и интерпретируем $P_1^2(y, z)$ как $y \leq z$, то $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$ представляет свойство (т.е. отношение с одним аргументом) «для каждого целого положительного y , $y \leq z$ », которое выполнено только для числа 1.

Как отмечает Э. Мендельсон, понятия выполнимости и истинности интуитивно ясны, но, следуя [Tarski 1936], они могут быть уточнены следующим образом. Пусть дана некоторая интерпретация с областью D , и пусть Σ есть множество всех счетных последовательностей элементов из D . Определим, что значит, что формула A выполнена на последовательности $s = (b_1, b_2, \dots)$ из Σ при данной интерпретации.

Предварительно определим одноместную функцию s^* со значениями из D и определенную на множестве всех термов.

- (1) Если терм t есть предметная переменная x_i , то $s^*(t) = b_i$.
- (2) Если терм t есть предметная константа, то $s^*(t)$ совпадает с интерпретацией этой константы в D .
- (3) Если f_i^n есть функциональная буква, интерпретируемая операцией g в D , и t_1, \dots, t_n — термы, то $s^*(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = g(s^*(t_1), \dots, s^*(t_n))$.

Таким образом, s^* — это функция, определяемая последовательностью s и отображающая множество всех термов в D . Если говорить неформально, то для любой последовательности $s = (b_1, b_2, \dots)$ и для любого терма t , $s^*(t)$ есть элемент множества D , который получается в результате подстановки при каждом i элемента b_i на места всех вхождений переменной x_i в терм t и затем выполнения всех операций интерпретации, соответствующих функциональным буквам терма t .

Теперь, следуя индуктивным шагам определения формулы, перейдем к основному определению.

первый из них приходится отцом другому, можно отождествить с множеством всех упорядоченных пар (людей) (x, y) таких, что x является отцом y .

- (i) Если A есть элементарная формула $P_i^n(t_1, \dots, t_n)$ и Q_j^n есть соответствующее ей отношение в интерпретации, то формула A считается выполненной на последовательности s в том и только в том случае, когда $Q_j^n(s^*(t_1), \dots, s^*(t_n))$, то есть если n -ка $(s^*(t_1), \dots, s^*(t_n))$ принадлежит отношению Q_j^n .
- (ii) Формула $\neg A$ выполнена на s т.т.т., когда формула A не выполнена на s .
- (iii) Формула $A \supset B$ выполнена на s т.т.т., когда формула A не выполнена на s или когда формула B выполнена на s .
- (iv) Формула $\forall x_i A$ выполнена на s т.т.т., когда формула A выполнена на любой последовательности из Σ , отличающейся от s не более чем своей i -ой компонентой.

Иначе говоря, формула A выполнена на последовательности $s = (b_1, b_2, \dots)$ из Σ т.т.т., когда подстановка при каждом i символа, представляющего b_i , на места всех свободных вхождений x_i в A приводит к истинному в данной интерпретации высказыванию.

Формула A называется *истинной* (в данной интерпретации) т.т.т., когда она выполнена на всякой последовательности из Σ .

Формула A называется *ложной* (в данной интерпретации), если она не выполнена ни на одной последовательности из Σ .

Данная интерпретация называется *моделью* для данного множества формул Γ , если каждая формула из Γ истинна в данной интерпретации.

Из этих определений, например, следует: если в данной интерпретации истинны A и $A \supset B$, то истинно и B ; A истинно в данной интерпретации т.т.т., когда в этой интерпретации истинно $\forall x_i A$.

Формула A называется *логически общезначимой* (в исчислении предикатов), если она истинна в каждой интерпретации. (В дальнейшем слова «в исчислении предикатов» будем опускать.)

Формула A называется *выполнимой*, если существует интерпретация, в которой A выполнима хотя бы на одной последовательности из Σ .

Формула A называется *противоречием*, если формула $\neg A$ является логически общезначимой или, что то же самое, если формула A ложна во всякой интерпретации.

Говорят, что формула A логически влечет формулу B , если в любой интерпретации формула B выполнена на всякой последовательности, на которой выполнена формула A . (В общем

случае говорят, что формула B является логическим следствием множества Γ формул, если во всякой интерпретации формула B выполнена на каждой последовательности, на которой выполнены все формулы из Γ .)

Как и в логике высказываний, формула A логически влечет формулу B т.т.т., когда формула $A \supset B$ логически общезначима.

Логически общезначимые формулы называются законами логики предикатов. Среди них — всякий частный случай произвольной тавтологии логики высказываний (т.е. результат замещения в ней пропозициональных переменных формулами языка логики предикатов). Приведем еще два примера общезначимых формул:

(I) $\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall xB)$, если формула A не содержит свободных вхождений x ;

(II) $\forall xA(x) \supset A(t)$, если терм t свободен для x в $A(x)$.

Как отмечается в [Мендельсон 1984: 64], аксиоматический метод был роскошью при изучении пропозиционального исчисления в силу его простоты и тривиального способа проверки, является ли данная пропозициональная формула тавтологией, но представляется необходимым при изучении формул, содержащих кванторы. В качестве исходных логических связей возьмем \neg и \supset , а в качестве квантора — \forall . Тогда в качестве пропозициональной части можно взять аксиоматизацию S_2 , предложенную Лукасевичем (см. выше раздел 1.5). Однако в силу сложности формулировки правил подстановки для исчисления предикатов обычно берутся схемы аксиом, каждой из которых соответствует бесконечное число аксиом одного и того же типа. К этим трем схемам аксиом добавляются две только что приведенные общезначимые формулы (I) — (II) с указанными ограничениями. Правилами вывода являются (i) *modus ponens* и (ii) правило обобщения: из A следует $\forall xA$.

Теорема дедукции для пропозиционального исчисления без соответствующей модификации не может быть проведена для первопорядковой логики. Например, $A \vdash \forall x_1 A$ для любой формулы A , но не всегда $\vdash A \supset \forall x_1 A$. Однако некоторые слабые варианты теоремы дедукции могут быть доказаны, например,

если формула A замкнута и $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Подробно о теореме дедукции см. в [Клини 1957, § 21-22].

1.6.3. Основные свойства: полнота, теорема Линдстрёма, неразрешимость

Если с доказательством непротиворечивости (*не существует формулы A такой, что $\vdash A$ и $\vdash \neg A$*) трудностей не возникало, то проблема о полноте оказалась намного сложнее.

Только в 1928 г. в книге Д. Гильберта и В. Аккермана (см. русский перевод 2-го издания, значительно переработанного [Гильберт и Аккерман 1947]) окончательно оформилась концепция *первопорядковой логики*, или *чистой теории квантификации* с кванторами «все» и «некоторые» и была поставлена проблема о доказательстве ее полноты. Эта проблема была решена К. Гёделем в 1930 г. (см. [Gödel 1986: 102-123]), хотя к 1928 г. это доказательство уже имелось у Т. Скулема (см. [Goldfarb 1979: 363]):

Во всяком исчислении предикатов первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.

Пусть T есть *первопорядковая теория*, т.е. множество предложений в языке логики предикатов, замкнутое относительно отношения выводимости. Имеют место два важнейших теоретико-модельных свойства теорий в *первопорядковом языке*.

Теорема компактности (для счетных языков). Если каждое конечное множество предложений в T имеет модель, то T имеет модель.

Компактность имеет место, поскольку во всех выводах используется только конечное множество посылок. Это свойство было уже выявлено К. Гёделем в работе о полноте логики предикатов. Позже А.И. Мальцевым (1936) было дано «чисто семантическое» доказательство этой теоремы.

Ранее было доказано другое важное свойство *первопорядковой логики* (1915, 1919):

Теорема Лёвенгейма-Скулема. Если T имеет бесконечную модель, то T имеет модель любой бесконечной мощности τ , большей или равной мощности теории T .

Понадобилось довольно-таки продолжительное время, пока П. Линдстрём [Lindström 1969] установил, что эти свойства являются характеристическими для *первопорядковой логики* в следующем смысле:

Теорема Линдстрёма. *Логика первого порядка является единственной логикой, замкнутой относительно \wedge , \neg , \exists и удовлетворяющей теоремам компактности и Лёвенгейма-Скулема*

По существу теорема Линдстрёма дает определение первопорядковой логики в терминах ее глобальных свойств и с этими свойствами она является уникальной. Не имеет значения, как мы будем расширять первопорядковую логику — в любом случае теряется или свойство компактности, или свойство Лёвенгейма-Скулема, или оба вместе. Уже второпорядковая логика, допускающая квантификацию по подмножествам, отношениям и функциям, кроме указанных свойств теряет также свойство полноты.

Интересно, что первоначально результат Линдстрёма не привлек к себе особого внимания, о чём говорит издание в 1973 г. знаменитой книги Г. Кейслера и Ч.Ч. Чэна (см. русский перевод [Кейслер и Чэн 1977]), где эта теорема вообще не обсуждается. Не обсуждается эта теорема и в [Мендельсон 1984]. Только в третьем издании [Chang and Keisler 1990] уже в предисловии говорится, что этот результат является отправной точкой для развития *абстрактной теории моделей* и вводится новый раздел (2.5), где дается определение «абстрактной логики» как пары классов (I, \models) , где I есть класс *предложений* и \models есть отношение выполнимости (satisfaction), удовлетворяющее определенным условиям. Наиболее известным примером абстрактной логики как раз и является обычная первопорядковая логика, которая обозначается посредством $I_{\omega, \omega}$. О теореме Линдстрёма см. также в [Hodges 2001, § 27].

Теорий первого порядка хватает для выражения многих известных математических теорий и, более того, большинство теорий высших порядков может быть подходящим образом «погружено» в язык первого порядка. Например, *многосортовая* первопорядковая логика⁶, которая также используется при изучении многозначных логик, является переинтерпретацией второпорядковой логики или даже логики высших порядков в первопорядковую с различными видами объектов. Редукция к первопорядковой логике настолько сильна, что мы приходим к рекурсивно-аксиоматизируемому множеству истин. Хорошее введение в многосортную первопорядковую логику можно найти в [Feferman 1974].

⁶ В отличие от односортной первопорядковой логики, рассмотренной здесь, где все переменные принадлежат к одному и тому же типу, в многосортной логике с каждой переменной связывается собственное множество ее возможных значений.

Очень полезным является расширение первогопорядковой логики введением отношения равенства между индивидами. Пусть T — теория первого порядка, в числе предикатных букв которой имеется P_1^2 . Будем сокращенно писать $t = s$ вместо $P_1^2(t, s)$. Теория T называется *теорией первого порядка с равенством*, если следующие формулы являются теоремами T :

$\forall x_1 (x_1 = x_1)$ — рефлексивность равенства;

$(x = y) \supset (P(x, x) \supset P(x, y))$ — подстановочность равенства,

где x и y — предметные переменные, $P(x, x)$ — произвольная формула, а $P(x, y)$ получается из $P(x, x)$ заменой каких-нибудь (не обязательно всех) свободных вхождений x вхождениями y , с соблюдением условия, чтобы y было свободно для тех вхождений x , которые заменяются.

Наконец, обратим внимание на еще одно фундаментальное свойство приведенного исчисления предикатов, которое относится к проблеме разрешимости, поставленной Д. Гильбертом в 1928 г. Эта проблема, по сравнению с аналогичной проблемой для исчисления высказываний, становится значительно сложнее, поскольку теперь уже приходится иметь дело с проверкой истинности общезначимой формулы в интерпретациях с областями сколь угодно большими конечными, а также бесконечными. А. Чёрч [Church 1936] и А. Тьюринг [Turing 1937] независимо друг от друга, опираясь на уточненное ими понятие вычислимой функции, доказали, что *первопорядковое исчисление предикатов неразрешимо*.

Теперь понятно, почему такое значение приобретает здесь представление данной логики в виде дедуктивного исчисления. С другой стороны, пришло осознание того, что неразрешимость является фундаментальным свойством даже таких «простых» логических исчислений, как первопорядковое исчисление предикатов. Более того, как мы увидим далее, некоторые пропозициональные логики тоже могут быть неразрешимыми, например, знаменитая релевантная логика **R**, в которой уточняется классическое понятие логического следования (см. ниже раздел 8.5.2).

2. ИНТУИТИВНОЕ ПОНИМАНИЕ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ И ЕЕ ВОЗНИКНОВЕНИЕ

2.1. Интуитивное понимание многозначной логики

Многозначная логика в отличие от двузначной классической логики имеет дело не только с истинными и ложными высказываниями, но и с высказываниями, которые таковыми не являются. Вопрос о том, что представляют собой высказывания, которые не истинны и не ложны, — центральная философская проблема для многозначных логик. По крайней мере, как мы увидим, потребовалось введение в логику хотя бы еще одного истинностного значения, отличного от 1 (истина) и 0 (ложь)¹. Множественность значений истинности высказываний позволяет строить из простых высказываний при помощи логических операций такие сложные высказывания, для которых нет аналогов в двузначной логике. В общем случае многозначная логика представляет собой обобщение двузначной логики, которая не может отразить всего многообразия логических построений, встречающихся на практике.

2.2. Источники многозначности в логике

Естественно возникает вопрос об источниках многозначности в логике. Один из убедительных философских аргументов в пользу принятия многозначной логики связан с указанием на недостаточность классических истинностных значений 1 и 0 для построения логических конструкций, моделирующих человеческие рассуждения. Недостаточность классических истинностных значений в первую очередь возникает из-за плюрализма нашего знания, например, в силу неопределенности поведения некоторых объектов и систем или неопределенности исходов эксперимента. Во-вторых, это отсутствие информации достаточной, чтобы оценить каждое высказывание как истинное или ложное. Например, неполнота информации может быть следствием неточности измерений. На современном уровне с условием неполноты информации связана разработка ДСМ-метода, в котором формализованы и программно реализованы методы сходства и различия Джона Стюарта Милля

¹ Часто вместо цифр 1 и 0 употребляются буквы И и Л, или Т и F, или t и f соответственно.

(1900 г.)². При неполной информации происходит также процесс аргументации. Наконец, имеет место принципиальная неполнота информации в некоторых математических теориях. В-третьих, существуют высказывания, могущие терять смысл, и приписывание им истинностных значений зависит от контекста их употребления. Одним из самых интересных примеров здесь служат высказывания, формулирующие логические и семантические парадоксы³. В-четвертых, имеется принципиальная многозначность (или нечеткость, размытость), органически связанная с определенными множествами и свойствами этих множеств. Например, хорошо известный парадокс «куча» Эвбулида из Милета на самом деле означает, что понятие кучи является принципиально нечетким. Из подобной нечеткости, аналогами которой являются понятия «молодой», «высокий» и т. д., в общем случае следует потребность в бесконечном числе истинностных значений, поскольку быть молодым можно с различной степенью, например, со степенью из интервала $[0, 1]$, мощность которого континуум (см. гл. 9).

2.3. Доказательство независимости аксиом

Кроме этих основных источников многозначности существует много других мотивировок, приводящих к идее построения многозначных логик. Например, мы можем потребовать, чтобы аксиомы и правила вывода классической логики обладали свойством *независимости*. Свойство независимости аксиомы A заключается в том, что A не есть теорема в системе, получающейся исключением A из числа аксиом. Тогда для доказательства независимости аксиомы A надо подобрать такие истинностные таблицы (модель), в которых все правила вывода обладают свойством сохранять тавтологию (т.е. заключение оказывается тавтологией каждый раз, когда посылки являются тавтологиями) и все аксиомы, кроме A , суть тавтологии. Отсюда будет следовать, что не являющаяся тавтологией аксиома A независима. Правило вывода является независимым, если существует теорема, которая не может быть доказана без этого правила. Описание общего метода доказательства независимости аксиом и правил вывода дано А. Чёрчем [Чёрч 1960, § 19].

² Идея возможности формализации индуктивных методов Д.С. Милля средствами многозначных логик была высказана В.К. Финном в докладе [Финн 1976а]. См. [Anshakov, Finn and Skvortsov 1989] и, в особенности, [Аншаков 2009, ред.].

³ О применении многозначной логики при решении парадоксов см. в книге [Bell and van Fraassen 2003].

Докажем независимость аксиоматизации классической пропозициональной логики C_2 , приведенной нами в разделе 1.5.⁴ Начнем с аксиомы (2) $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$.

Рассмотрим следующие истинностные трехзначные таблицы для отрицания и импликации:

p	$\neg p$
*1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

\supset	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

Звездочкой отмечено *выделенное* значение, которое принимают тавтологии. Легко проверить, что аксиомы (1) и (3) являются тавтологиями. Однако аксиома (2) не является тавтологией, ибо она принимает значение $\frac{1}{2}$, когда p, q, r получают соответственно значения $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, и 0.

Независимость аксиомы (3) $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$. Рассмотрим следующие таблицы:

p	$\neg p$
*1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

\supset	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

Тогда аксиомы (1) и (2) являются тавтологиями, а аксиома (3) нет, ибо принимает значение $\frac{1}{2}$, когда p принимает значение $\frac{1}{2}$ и q принимает значение 1.

Независимость аксиомы (1) $p \supset (q \supset p)$. Рассмотрим следующие таблицы:

⁴ Доказательство независимости аксиом C_2 с множеством связок $\{\neg, \supset, \vee, \wedge, \equiv\}$ см. в [Гильберт и Бернайс 1979, гл.3, § 4] (первое издание этой книги в 1934 г.) В [Kanger 1955] дано табличное доказательство независимости со свойством отделимости связок. В [Robinson 1968] аксиоматизация C_2 из [Kanger 1955] несколько упрощена и дано новое доказательство независимости аксиом.

p	$\neg p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

\supset	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Тогда аксиомы (2) и (3) являются тавтологиями при двух выделенных значениях 1 и $\frac{1}{2}$, а аксиома (1) нет, ибо принимает значение 0, когда p принимает значение $\frac{1}{2}$ и q принимает значение 1.

Понятно, что при доказательстве независимости могут быть использованы в качестве модели различные истинностные таблицы⁵, например, при доказательстве независимости аксиомы (1) можно подобрать истинностные таблицы с одним выделенным значением. При этом надо быть внимательным при подборе соответствующей таблицы для импликации. Для того, чтобы правило МР сохраняло тавтологию, надо следить за следующим: если высказывание p принимает выделенное значение, а q принимает не выделенное значение, то импликативное высказывание $p \supset q$ не должно принимать выделенное значение. Независимость правила МР следует из того факта, что доказанная нами ранее теорема $p \supset p$ не может быть получена без применения МР, поскольку является короче любой из трех наших аксиом. Что касается правила подстановки, то оно всегда сохраняет тавтологию при любой системе истинностных значений и при любой истинностной таблице. Его независимость следует из того факта, что без него не может быть доказана никакая формула, которая была бы длиннее самой длинной аксиомы.

Метод использования многозначных истинностных таблиц (с одним или несколькими выделенными значениями) для доказательства независимости аксиом был уже известен П. Бернайсу в 1918 г. (см. [Bernays 1926]). Однако, как замечает Я. Лукасевич [Łukasiewicz 1941: 284], этот метод был известен ему до публикаций П. Бернайса. Исследования в этой области проводились также А. Тарским [Tarski 1930b], согласно которому множество аксиом является независимым, если оно не эквивалентно никакому своему собственному подмножеству. Ряд логиков связывает происхождение многозначной логики именно с обобщением идеи доказательства независимости аксиом классической логики⁶. В этом слу-

⁵ Почему мы выбрали именно такие истинностные таблицы, станет ясно в следующей главе, в которой мы перейдем к изучению наиболее интересных трехзначных логик.

⁶ Кроме А. Чёрча и А. Роуза [Rose 1981] сошлемся также на известный учебник по логике Э. Мендельсона [Мендельсон 1984, гл. 1, § 5].

чае многозначные истинностные таблицы рассматриваются в их самостоятельном значении. Это значит, что к рассмотрению берется некий абстрактный универсум, в котором высказывания разделены на n категорий, в отличие от классической логики, где высказывания разделены на две категории. Отсюда в чистом виде возникает сложнейшая проблема интерпретации этого абстрактного универсума (см. гл. 10).

Данный метод доказательства независимости аксиом станет важнейшим инструментом при построении нами конечных булевых решеток импликативных и других логик (см. Приложение).

Конечно, метод доказательства независимости аксиом был распространен и на более богатые системы, включая первопорядковую логику. Особую значимость он приобрел при доказательстве независимости аксиом теории множеств. Ключевая идея была объяснена Д. Скоттом в 1967 г. и состояла в том, что множество истинностных значений образует структуру в виде булевой алгебры, а сам метод получил название *булевозначных моделей* для теории множеств (см., например, [Rosser 1969]). Изложение этого метода и соответствующую литературу можно найти в [Gottwald 2001, Ch. 23.2]

2.4. Аристотелевский фаталистический аргумент

На самом же деле многозначная логика возникла из весьма глубоких философских предпосылок. Она появляется тогда, когда отвергается *принцип двужначности* (принцип бивалентности), согласно которому любое высказывание является или только истинным или только ложным. Однако уже в античности этот принцип был подвергнут сомнению. Аристотель в знаменитой 9-ой главе трактата «Об истолковании» [Аристотель 1978: 99-102], пытаясь опровергнуть им же изобретенный фаталистический аргумент, ставит проблему истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях, например, таких, как завтрашнее морское сражение. Дело в том, что Аристотель придерживается принципа, который, видимо, был общепринят в античности, что истинность высказывания о некотором событии влечет его необходимость (*принцип необходимости*). Тогда суть аристотелевского аргумента можно выразить так.

Предположим, сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, чтобы завтра не было морского сражения, иначе не было бы истинно, что морское сражение завтра будет. Следовательно, завтрашнее морское сражение является *необходимым* событием (принцип необходимости). Подобно

этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то *необходимо*, что морское сражение завтра не произойдет. Но сейчас истинно или ложно, что завтра будет морское сражение (принцип двузначности). Следовательно, или необходимо, что оно будет, или необходимо, что его не будет. Обобщая этот аргумент, получаем, что все в мире происходит по необходимости, и нет ни случайных событий, ни свободы выбора.

Логическая структура данного аргумента выглядит следующим образом. Пусть p есть высказывание о будущем случайном событии; $\sim p$ — высказывание, противоречащее p , и читается как «не- p »; $T(p)$ и $F(p)$ обозначают соответственно «истинно, что p » и «ложно, что p »; $N(p)$ обозначает «необходимо, что p ». Тогда имеем:

- (1) $T(p) \rightarrow N(p)$ — принцип необходимости,
- (2) $F(p) \rightarrow N(\sim p)$ — по аналогии с (1),
- (3) $T(p) \vee F(p)$ — принцип двузначности,
- (4) $N(p) \vee N(\sim p)$ — из (1), (2) и (3) по правилу классической логики, которое называется «сложная конструктивная дилемма»: из $A \rightarrow C$, $B \rightarrow D$ и $A \vee B$ следует $C \vee D$.

Ограничивая сферу действия принципа двузначности, Аристотель тем самым разрушает свой фаталистический аргумент, лежащий в основании доктрины *логического фатализма*⁷.

Однако фаталистический аргумент Аристотеля можно реконструировать по-другому:

- (1) $T(p) \rightarrow N(p)$ — принцип необходимости
- (2) $T(\sim p) \rightarrow N(\sim p)$ — подстановка в (1): $\sim p$ вместо p
- (3) $T(p) \vee T(\sim p)$ — семантический принцип исключенного третьего,
- (4) $N(p) \vee N(\sim p)$ — из (1), (2) и (3).

Заметим, что в силу следующего определения предиката «ложный», восходящего к Аристотелю: «ложность есть истинность отрицания (противоречивого) высказывания», т.е. $F(p) \equiv T(\sim p)$, принципы $T(p) \vee F(p)$ и $T(p) \vee T(\sim p)$ становятся эквивалентными. И здесь проблем для Аристотеля не возникает, какой принцип отбрасывать. Более того, если мы к тому же принимаем конвенцию Тарского, которая утверждает, что фраза «истинно, что ...», пред-

⁷ Подробный обзор различных фаталистических аргументов и способы их опровержения см. в монографии [Карпенко 1990]. Заметим, что попытки опровержения фаталистических аргументов привели к возникновению целого ряда неклассических логик.

высказывание p , является излишней в классической логике, т.е. $T(p) \equiv p$, то закон исключенного третьего $p \vee \sim p$ и принцип двузначности $T(p) \vee F(p)$ эквивалентны. Как отмечает Г.Х. фон Вригт, принятие конвенции Тарского ведет к тому, что «любая попытка провести строгое разграничение между Законом Исключенного Третьего и Законом Бивалентности напрасна» [Вригт 1986а: 544]. Таким образом, в классической логике оба эти принципа эквивалентны, но в общем случае это не так, и на это впервые в 1922 г. обратил внимание Я. Лукасевич. Его опровержение приведенного фаталистического аргумента состоит в том, что отбрасывается принцип бивалентности и в логику вводится дополнительное, *третье*, истинностное значение (см. [Лукасевич 1993]).

Однако с развитием многозначной логики оказалось, что введение дополнительных истинностных значений данную проблему не решает. Можно показать на весьма упрощенной ситуации, а именно на уровне пропозиционального языка (если, следуя фон Вригту, вместо предиката “истинный” будем рассматривать пропозициональный “оператор истинности” Tr), что принятие конвенции Тарского приводит к тому, что в общем случае средствами многозначной логики нельзя опровергнуть фаталистический аргумент Аристотеля. Этот аспект мы рассмотрим в разделе (5.4.6.3), где будет построен пропозициональный базис для новой теории истинны.

2.5. Предыстория появления многозначной логики

Принятие принципа двузначности в античности было тесно связано с доктриной детерминизма (фатализма). Эпикурейцы, которые были индетерминистами, отрицали принцип двузначности, в то время как стоики, и прежде всего Хризипп, являющиеся последовательными детерминистами, учили, что все высказывания, в том числе и высказывания о будущих случайностях, должны быть истинными или ложными, и считали это утверждение направленным против Аристотеля. Особенно бурно проблема истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях обсуждалась в средневековье, поскольку решение этой проблемы нужно было совместить с теологическим обоснованием возможности божественного предвидения будущих случайных событий, — например, свободных поступков людей, — если утверждения и отрицания о таких событиях не истинны и не ложны. Дунс Скот и в особенности Уильям Оккам квалифицировали такие высказывания как *неопределенные*. Некоторые исследователи считают У. Оккама, который посвятил этой проблеме специальный трактат [Оккам 1983], предшественником трехзначной логики.

Только в начале XX в. исходные идеи многозначной логики начинают обсуждаться вновь, в особенности в работах шотландского философа Х. Мак-Колла (1837–1909) и американского философа и логика Чарльза Пирса (1839–1914); элементы многозначной логики можно усмотреть и у русского логика Н.А. Васильева (1880–1940) после некоторой реконструкции его идей⁸. Мак-Колл рассматривает высказывания, которые иногда истинны и иногда ложны, называя их переменными высказываниями, например, « $x = 2$ », в отличие от всегда истинного высказывания « $2 = 2$ » и от всегда ложного высказывания « $2 = 3$ ». Истинностные значения переменных высказываний Мак-Колл связывает с исчислением вероятностей. Пирс подошел к идее многозначной логики с нескольких точек зрения. Одна из них — проблема будущей случайности у Аристотеля. Сейчас известно, что уже к 1909 г. Пирс владел методом истинностных таблиц для трехзначной логики, обосновывая третье истинностное значение как промежуточное между определенной истиной и определенной ложью. Н. А. Васильев в период 1910–1914 гг. опубликовал несколько работ о «воображаемой логике». Он рассматривал свои работы как попытку построения неаристотелевской логики аналогично тому, как Лобачевский построил неевклидову геометрию. В частности, в этих логиках отсутствует закон исключенного третьего и вообще возможны логики без закона исключенного $(n+1)$ -го.

⁸ Соответствующая литература приведена в подстрочных примечаниях Н. Решером [*Rescher* 1969: 4–6]. Отметим только статью В.А. Смирнова [*Смирнов* 1962], впервые открывшего для широкой логической общественности Н.А. Васильева. См. также переиздание В.А. Смирновым избранных трудов Н.А.Васильева [*Васильев* 1989].

3. ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

3.1. Трехзначная логика Лукасевича E_3

Проблема, которую Ян Лукасевич (1878–1956), основатель логического направления в Львовско-Варшавской школе (см. [Воленский 2004]), стремился разрешить, прилагая необычайные усилия, — это проблема детерминизма¹. Анализируя аристотелевскую проблему истинностного статуса высказываний о будущих случайных событиях, Я. Лукасевич приходит к важному выводу, что принцип двузначности (бивалентности) не является универсальным и, по крайней мере, к высказываниям о будущих случайных событиях не применим. Исходя из этих соображений, Лукасевич вводит в логику третье истинностное значение, которое в отличие от 1 (истина) и 0 (ложь) обозначается $\frac{1}{2}$ и интерпретируется как «безразлично», а позже как «возможно». Этим разрушается аристотелевский фаталистический аргумент, поскольку одна из исходных посылок, а именно принцип двузначности, отбрасывается. Однако введение дополнительного истинностного значения сразу же ставит другую серьезную проблему: переопределение логических связок.

Первая система трехзначной логики конструируется Я. Лукасевичем [Łukasiewicz 1920] следующим образом. В качестве исходных логических связок берутся отрицание \sim и импликация \rightarrow , для которых оставляются классические значения, когда аргументы принимают значения из множества $\{0, 1\}$. В остальных случаях доопределение связок происходит следующим образом:

$$\begin{aligned}(1 \rightarrow \tfrac{1}{2}) &= (\tfrac{1}{2} \rightarrow 0) = \tfrac{1}{2}, \\ (0 \rightarrow \tfrac{1}{2}) &= (\tfrac{1}{2} \rightarrow \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2} \rightarrow 1) = 1, \\ \sim \tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Посредством исходных связок по определению (которое будем обозначать посредством $=$.) вводятся другие логические связки:

$$\begin{aligned}p \vee q &=: (p \rightarrow q) \rightarrow q && \text{(дизъюнкция),} \\ p \wedge q &=: \sim(\sim p \vee \sim q) && \text{(конъюнкция),} \\ p \leftrightarrow q &=: (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && \text{(эквиваленция).}\end{aligned}$$

Тогда истинностные таблицы для логических связок выглядят так:

¹ См. русский перевод знаменитой статьи Я. Лукасевича «О детерминизме» [Лукасевич 1993], где дается философское обоснование введения в логику третьего истинностного значения. См. логический комментарий к этой статье в [Карпенко 1993b], а также философский комментарий в [Карпенко 1995c].

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

\rightarrow	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

\vee	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

\wedge	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

\leftrightarrow	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Истинностное значение 1 здесь и далее, если не оговорено другое, называется *выделенным* истинностным значением. Как и для классической логики S_2 , формула A называется *тавтологией*, если она принимает истинностное значение 1 независимо от того, какие значения принимают входящие в нее пропозициональные переменные. Множество данных тавтологий называется *трехзначной логикой Лукасевича* и обозначается посредством \mathbb{L}_3 .

Обратим внимание на то, что истинностные таблицы для \sim и \rightarrow появились у нас при доказательстве независимости аксиомы самодистрибутивности (см. 2.3). Таким образом, \mathbb{L}_3 может быть получена, исходя из совершенно других соображений.

Первая аксиоматизация множества тавтологий \mathbb{L}_3 была приведена учеником Лукасевича М. Вайсбергом [Wajsberg 1931]:

$$W1. (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$W2. p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$W3. (\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$W4. ((p \rightarrow \sim p) \rightarrow p) \rightarrow p.$$

Правила вывода, как и для S_2 : МР и подстановка.

Аксиоматизация Вайсберга означает, что для \mathbb{L}_3 , как и для S_2 (см. выше раздел 1.4), имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Для всякой формулы A , $\vdash A$ в \mathbb{L}_3 тогда и только тогда, когда $\models A$ в \mathbb{L}_3 .²

² Доказательство строгой полноты дано в [Goldberg, Leblanc and Weaver 1974].

Таким образом, как и классическое исчисление C_2 , исчисление L_3 непротиворечиво и дедуктивно полно. Также тривиальным образом следует его разрешимость из трехзначности семантики.

3.1.1. Отличия трехзначной логики Лукасевича L_3 от классической C_2

Обратим внимание на одно весьма важное свойство истинностных таблиц для L_3 , а именно: на классическом множестве истинностных значений, т.е. на множестве $\{1, 0\}$ определение логических связок L_3 совпадает с определением связок классической двузначной логики C_2 . Отсюда следует, что любая тавтология L_3 есть тавтология C_2 , но не наоборот.

Например, легко проверить, что закон сокращения

$$(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

не есть тавтология в L_3 .³ Заметим, что если в аксиоматизации Вайсберга аксиому (W4) заменить на закон сокращения, то получим аксиоматизацию C_2 . Это следует из того факта, что из аксиом Вайсберга W1, W2 и закона сокращения выводима *самодистрибутивность*, т.е. в аксиоматизации C_2 , представленной Лукасевичем (см. 1.5), *самодистрибутивность* можно заменить на *транзитивность* и *сокращение*. Тогда аксиоматизацию L_3 Вайсбергом можно представить как замену в новой аксиоматизации C_2 закона сокращения на аксиому W4.

Введение Лукасевичем в логику третьего истинностного значения, промежуточного между истиной и ложью, имело радикальные последствия для самой логики, самым главным из которых оказалось то, что не все законы классической логики имеют место в L_3 . В первую очередь обращает на себя внимание тот факт, что ни *закон исключенного третьего* $p \vee \sim p$ и, главное, ни *закон непротиворечия* $\sim(p \wedge \sim p)$ не являются законами L_3 : эти формулы принимают значение $1/2$, когда p имеет значение $1/2$. Реакция на подобную ревизию классической логики была весьма неоднозначной (и для многих логиков отбрасывание этих законов было неприемлемо⁴), а сам Лукасевич неоднократно подчеркивал, что построенная им трехзначная система логики отличается от двузначной логики,

³ Таким образом, трехзначная логика Лукасевича является исторически первым примером логик без сокращения, которые в последнее время привлекли к себе большое внимание. См. [Ono and Komori 1985], где также обсуждаются логики Лукасевича.

⁴ Подробно об этом см. в [Карпенко 1990, гл. 3].

единственно тогда известной, настолько сильно, насколько неевклидовы системы геометрии отличаются от евклидовой геометрии (см., например, [Łukasiewicz 1930: 176]).

Заметим, что Лукасевич определяет дизъюнкцию $p \vee q$ и конъюнкцию $p \wedge q$ таким образом, чтобы они имели свойства классических логических связок, т.е. как и в классической логике \mathbf{C}_2 значение $p \vee q$ является максимальным, а значение $p \wedge q$ — минимальным. Но можно определить $p \vee q$ по-другому, а именно $p \vee q =: \sim p \rightarrow q$, т.е. теперь $1/2 \vee 1/2 = 1$. Тогда закон исключенного третьего $p \vee \sim p$ будет законом \mathbf{L}_3 , но не будет законом формула $(p \vee p) \rightarrow p$. Такую дизъюнкцию обозначим посредством $p \oplus q$; она появится у нас в гл. 8. Эти примеры указывают на другую особенность \mathbf{L}_3 , которая заключается в том, что уже в трехзначной логике становится возможным обобщать свойства классических связок поразному, в результате чего и получаем, например, различные дизъюнкции, в то время как в \mathbf{C}_2 : $p \vee q \equiv \neg p \supset q \equiv (p \supset q) \supset q$, где \neg и \supset есть классические связки отрицания и импликации соответственно.

Отметим также, поскольку закон сокращения не есть тавтология в \mathbf{L}_3 , то немедленным следствием этого является то, что стандартная теорема дедукции не имеет места в \mathbf{L}_3 . Например, при стандартном определении логического следования \models :

$$p \wedge \sim p \models q, \text{ но } \not\models (p \wedge \sim p) \rightarrow q \text{ в } \mathbf{L}_3.$$

Подходящей логической связкой для *стандартной* формы теоремы дедукции может быть следующая:

$$p \rightarrow_1 q =: p \rightarrow (p \rightarrow q).$$

Ее истинностной таблицей является

\rightarrow_1	1	$1/2$	0
1	1	$1/2$	0
$1/2$	1	1	1
0	1	1	1

Истинностная таблица для \rightarrow_1 независимо друг от друга была предложена в [Ślipecki, Bryll and Prucnal 1967] и [Monteiro A. 1967]. Также независимым образом она вводится в [Avron 1991], как обладающая многими желательными свойствами. Эта импликация верифицирует имплекативный фрагмент классической логики. Теперь мы можем взять в качестве исходных связок \mathbf{L}_3 другое множество связок, например, $\{\sim, \rightarrow_1, \wedge, \vee\}$. Но тогда нужно показать,

что логики с множествами связок $\{\sim, \rightarrow\}$ и $\{\sim, \rightarrow_1, \wedge\}$ эквивалентны, т.е. показать, что посредством множества связок $\{\sim, \rightarrow\}$ определимы связки из множества $\{\sim, \wedge, \rightarrow_1\}$, и наоборот. В одну сторону мы уже показали. Остается только определить посредством нового множества связок импликацию \rightarrow :

$$p \rightarrow q =: (p \rightarrow_1 q) \wedge (\sim q \rightarrow_1 \sim p).$$

Такую эквивалентность множеств логических связок Н. Решер назвал *D-эквивалентностью* [Rescher 1969]. Обычно говорят, что в этом случае имеет место *функциональная эквивалентность* (см. подробно в гл. 7).

Обратим внимание на трехзначную логику **BL** [Blau 1978], предназначенную для анализа естественного языка и явившуюся следствием дискуссии в области философии языка. Третье истинностное значение $u = 1/2$ интерпретируется как *неопределено* (*undetermined*) и его появление вызвано или использованием нечетких предикатов, или использованием имен, не имеющих денотатов. На пропозициональном уровне логика **BL** содержит три исходные связки: отрицание \sim и конъюнкцию \wedge Лукасевича и еще одно отрицание \approx (у нас оно появится в разделе 3.2.1 под обозначением $\bar{}$). Теперь вводится связка импликации \rightarrow_{BL} :

$$p \rightarrow_{BL} q =: \bar{p} \vee q$$

и утверждается, что только эта импликация является подходящей для трехзначного моделирования предложений вида «Все A есть B » в естественном языке. Обратим внимание, что импликация \rightarrow_{BL} есть не что иное, как импликация \rightarrow_1 , рассмотренная чуть выше, а значит логика **BL** по своим функциональным свойствам есть на самом деле трехзначная логика Лукасевича \mathbf{L}_3 .⁵ Ключевым моментом использования логики **BL** является идея, что естественный язык использует только связки, которые удовлетворяют *нормальному условию*. Условие нормальности (см. [Gottwald 2001: 31]) для некоторой связки ϕ заключается в том, что ограничение ϕ на множестве истинностных значений $\{0, 1\}$ есть классическая связка⁶. Логика **BL** рассматривается в [Gottwald 2001: 390-393] (без указания, что она есть \mathbf{L}_3), где доказывается, что каждая трехзначная связка, которая удовлетворяет условию нормальности, может быть опреде-

⁵ Заметим, что импликация \rightarrow_1 появляется также в логике **LPF**, которая была развита в рамках *VDM* проекта [Barringer, Cheng and Jones 1984], и опять же **LPF** по функциональным свойствам есть \mathbf{L}_3 .

⁶ Логики с такими связками в [Аншаков и Рычков, 1982] названы *С-расширяющими* (см. раздел 6.3). Это восходит к Н. Решеру [Rescher 1969], где истинностные таблицы с таким свойством названы *нормальными*.

лена посредством исходных связок **ВЛ**. Аналогичные теоремы периодически появляются в литературе, однако, заметим, что данное утверждение является следствием теоремы В.К. Финна [Финн 1969] о функциональной предполноте \mathbf{L}_3 . Последнее означает, что добавление к \mathbf{L}_3 связки, не содержащейся в ней, превращает \mathbf{L}_3 с этой связкой в трехзначную функционально полную логику⁷.

Отсюда можно перейти к еще одному существенному отличию \mathbf{L}_3 от \mathbf{C}_2 , которое состоит в следующем. Как известно, классическая двузначная логика является функционально полной, т.е. любая булева функция может быть выражена, например, посредством импликации и отрицания. В \mathbf{L}_3 это не так, например, нельзя посредством связок Лукасевича \sim и \rightarrow выразить связку Слупецкого Tr , которая переводит любое значение p в $\frac{1}{2}$:

p	Tr
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$

Однако если к \mathbf{L}_3 добавим эту связку, то получим функционально полную трехзначную логику, которую обозначим посредством \mathbf{L}_3^T .

Теперь, если к аксиомам Вайсберга для \mathbf{L}_3 добавим две аксиомы, содержащие связку Слупецкого Tr :

$$5. \text{Tr} \rightarrow \sim \text{Tr}$$

$$6. \sim \text{Tr} \rightarrow \text{Tr},$$

то получим аксиоматизацию трехзначной логики \mathbf{L}_3^T , представленную Е. Слупецким [Slupecki 1936]. Заметим, что в классической логике никакие формулы вида $A \supset \neg A$ и $\neg A \supset A$ не являются тавтологиями.

3.1.2. Трехзначная модальная логика Лукасевича

Обратим внимание на еще одну особенность \mathbf{L}_3 (и в целом любой многозначной логики), которая состоит в том, что теперь мы можем конструировать новые логические связки, не существующие в \mathbf{C}_2 . Этот факт для Лукасевича является весьма важным, поскольку

⁷ Более подробно о свойстве функциональной предполноты см. в разделе 7.3.3. При обобщении \mathbf{L}_3 на произвольный конечный случай, т.е. на \mathbf{L}_n ($n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$), функциональные свойства последней окажутся весьма необычными, и это станет предметом специального рассмотрения.

он показал, что в рамках двузначной логики нельзя построить модальную логику, но теперь, введя в логику третье истинностное значение, Лукасевич ставит задачу дать такое определение связки *возможности* $\Diamond p$, чтобы для всех теорем о модальных предложениях, идущих от Аристотеля и вплоть до Лейбница, существовала интерпретация в трехзначной логике \mathbb{L}_3 , посредством которой каждая такая теорема была бы истинной⁸. Искомое определение было дано в 1921 г. А.Тарским: $\Diamond p =: \sim p \rightarrow p$, т.е. «возможно, что p » означает «если не- p , то p ». Связка *необходимости* $\Box p$ определяется через исходную связку $\Diamond p$ обычным образом: $\Box p =: \sim \Diamond \sim p$. Исходя из этих определений строятся истинностные таблицы для $\Diamond p$ и $\Box p$:

p	$\Diamond p$	$\Box p$
1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	0

Обратим внимание, что можно ввести и другие модальные логические связки, наиболее интересной из которых является связка *случайности*: $\nabla p =: \Diamond p \wedge \Diamond \sim p$ [Prior 1953]⁹:

p	∇p
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	0

Связка эта, как мы увидим, окажется весьма востребованной. Заметим только, что впервые она была введена Д.А. Бочваром в 1938 г., обозначена как $\downarrow p$ и интерпретирована как « p не имеет смысла» (см. ниже раздел 3.3.1).

Интересно, что уже А. Прайор обратил внимание на то, что между свойствами модальных операторов \mathbb{L}_3 и модальных операторов системы Льюиса $S5$ (см. гл. 8) имеется некоторое сходство,

⁸ См. [Łukasiewicz 1930]. В этой статье дается еще одно философское обоснование введения в логику третьего истинностного значения.

⁹ В [Epstein 1990: 236] эта связка интерпретируется как «неопределено, что...», обозначается посредством « $\downarrow p$ » и определяется весьма изящно:

$\downarrow p =: p \leftrightarrow \sim p$.

которое нашло свое точное выражение в работе Р. Вудруффа [Woodruff 1974], где дан перевод \mathbf{L}_3 в $S5$ такой, что только те формулы есть теоремы в \mathbf{L}_3 , чей перевод есть теоремы $S5$. Таким образом, \mathbf{L}_3 можно проинтерпретировать посредством $S5$. Более того, в [Minari 2003] дана аксиоматизация \mathbf{L}_3 с помощью характеристических модальных аксиом для $S5$ и значительно упрощено доказательство теоремы полноты для \mathbf{L}_3 , предложенное Вайсбергом. Однако заметим, что, как и во всякой модальной логике, в \mathbf{L}_3 не имеет места $p \rightarrow \Box p$, но, к сожалению, формула $p \rightarrow (p \rightarrow \Box p)$ оказывается тавтологией.

Напомним, что исходными логическими связками в \mathbf{L}_3 являются отрицание \sim и импликация \rightarrow , через которые и определяются дизъюнкция \vee , конъюнкция \wedge и модальные операторы \Diamond и \Box . Но легко видеть, что посредством отрицания, дизъюнкции и конъюнкции нельзя определить импликацию в \mathbf{L}_3 . Более того, при выделенном значении «1» множество тавтологий в системе с исходными связками $\{\sim, \vee, \wedge\}$ будет пусто¹⁰. Однако если к этой системе добавить модальные операторы Тарского, как это делает Е. Слупецкий в статье, посвященной интуитивной интерпретации \mathbf{L}_3 [Stupecki, Bryll and Prucnal 1967] (см. также [Слупецкий 1974]), то получим логику, функционально эквивалентную \mathbf{L}_3 . Чтобы это показать, достаточно через множество связок этой логики определить импликацию $p \rightarrow q$ из \mathbf{L}_3 . Слупецкий это делает следующим образом:

$$p \rightarrow q =: (\sim p \vee q) \vee \Diamond(\sim p \wedge q)^{11},$$

замечая по этому поводу, что смысл данного выражения, т.е. смысл импликации Лукасевича, довольно-таки неуловим. И поэтому в указанной работе решается проблема, поставленная Слупецким еще в начале 60-х годов, об аксиоматизации трехзначной логики Лукасевича \mathbf{L}_3 со множествами исходных связок $\{\vee, \sim, \Box\}$, $\{\vee, \sim, \Diamond\}$, $\{\wedge, \sim, \Box\}$, $\{\wedge, \sim, \Diamond\}$. В итоге дается аксиоматизация \mathbf{L}_3 со множеством связок $\{\vee, \sim, \Box\}$ ¹², а в качестве импликации принимается связка \rightarrow_1 , которая вводится по определению:

$$p \rightarrow_1 q =: \sim(\Box p) \vee q.$$

¹⁰ Логика с такими связками называется трехзначной логикой Клини K_3 , (см. раздел 3.4.1).

¹¹ Определение импликации $p \rightarrow q$ посредством этих же связок имеется уже у Г. Мойсила [Moisil 1940], но значительно сложнее. Отметим также, что В.И. Шестаковым [Шестаков 1964] предложено следующее определение импликации Лукасевича:

$$p \rightarrow q =: (\sim p \vee q) \vee (\downarrow p \wedge \downarrow q).$$

¹² Интересно, что аксиоматизация логики с такими же связками была уже дана Л. Оквистом [Åqvist 1962], но без указания на эквивалентность с \mathbf{L}_3 .

3.2. Трехзначная логика Гейтинга G_3

Трехзначная матричная интуиционистская логика G_3 появилась в работе А. Гейтинга [Heyting 1930], где впервые было сформулировано пропозициональное (и предикатное) интуиционистское исчисление **Int** (о некоторых свойствах последнего см. в гл. 8.2.2)¹³. Отрицание, импликацию, дизъюнкцию и конъюнкцию в G_3 обозначим посредством \neg , \Rightarrow , \vee и \wedge соответственно.

Истинностные таблицы для G_3 впервые были использованы Гейтингом при доказательстве независимости аксиом **Int** и выглядят следующим образом:

p	$\neg p$	\Rightarrow	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	0	1	1	1

Заметим, что это как раз те истинностные таблицы, которые появились у нас при доказательстве независимости аксиомы обратной контрапозиции (см. 2.3).

Таблицы для \vee и \wedge в G_3 в точности совпадают с таблицами для этих связок в L_3 . Заметим, что истинностная таблица для \Rightarrow была использована нами при доказательстве независимости аксиомы контрапозиции (см. 2.3.) Разница между системами связок L_3 и G_3 весьма существенна, поскольку в G_3 через $\neg p$ и $p \Rightarrow q$ нельзя определить $p \vee q$ и $p \wedge q$. Но

$$p \vee q =: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p).$$

Отсюда следует, что в качестве исходных связок в G_3 можно взять связки \neg , \wedge и \Rightarrow . Легко убедиться, что ни $\neg \neg p \Rightarrow p$, ни $p \vee \neg p$ не являются здесь тавтологиями, но первая есть тавтология в L_3 .

Истинностные таблицы для G_3 появляются также в работе К. Гёделя [Gödel 1932] при построении последовательности n -значных логических матриц, каждая из которых не является характеристической для **Int**, а также в работе С. Яськовского [Jaśkowski

¹³ Аксиоматизация **Int** получается из аксиоматизации C_2 , приведенной С.К. Клини (см. выше раздел 1.4), посредством замены закона снятия двойного отрицания $\sim \sim p \supset p$ на закон Дунса Скота $p \supset (\sim p \supset q)$.

1936], построившего бесконечную последовательность матриц, которая *финитно аппроксимирует* **Int**. Эти понятия объясняются в следующей главе.

Впервые G_3 была аксиоматизирована Я. Лукасевичем [Łukasiewicz 1941: 286]. Она получается за счет добавления к аксиомам интуиционистского пропозиционального исчисления **Int** аксиомы

$$(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (((q \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Rightarrow q)^{14}.$$

К логике G_3 мы еще вернемся, когда будем изучать функциональные свойства многозначных логик.

3.2.1. Трехзначная логика Брауэра G_3^* (дуальная к G_3)

Представляет интерес рассмотреть логику, дуальную к G_3 , которую назовем трехзначной логикой Брауэра G_3^* . Импликацию \Leftarrow , дуальную к \Rightarrow , определим следующим образом:

$$p \Leftarrow q =: \neg(\neg p \Rightarrow \neg q) \text{ [Monteiro A. 1980: 36].}$$

Отрицание \neg , дуальное к \neg , определяется как $\neg p =: p \Leftarrow 1$.

Тогда истинностные таблицы для $p \Leftarrow q$ и $\neg p$ выглядят следующим образом:

p	$\neg p$	\Leftarrow	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0

Дизъюнкция \vee и конъюнкция \wedge те же самые, что и в G_3 .

Легко убедиться, что здесь, в отличие от G_3 , закон исключенного третьего $p \vee \neg p$ является тавтологией, а закон Дунса Скота $p \Leftarrow$

¹⁴ Заметим, что Н. Решер [Rescher 1969: 45] дает неправильную ссылку на работу Лукасевича, относящуюся к 1952 г., а в [Bolz and Borovik 1992: 84] приведенная выше аксиоматизация G_3 приписывается К. Гёделю. Трехзначная логика Гейтинга стала интенсивно исследоваться в нашей стране и по предложению А.А. Маркова получила название «логика Сметанича» в связи с первой работой Я.С. Сметанича [Сметанич 1960], изучавшего ее свойства и предложившего свою аксиоматизацию, правда, более сложную. В [Янков 1968а] со ссылкой на Я.С. Сметанича приводится другая аксиоматизация G_3 : к **Int** добавляется аксиома $(p \supset q) \vee (q \supset r) \vee (r \supset s)$. Еще одно название G_3 — «первая матрица Яськовского». Именно под этим названием она изучалась в целой серии работ М.Ф. Раца, начиная с [Раца 1965а] (см. ниже раздел 7.5.2).

$(\vdash p \Leftarrow q)$ — тождественно ложной формулой. Последнее говорит о том, что G_3 является *паранепротиворечивой* логикой (см. раздел 3.5).

3.2.2. Взаимоотношение G_3 с L_3

Впервые определимость связок из G_3 посредством L_3 была представлена Г. Мойсилом [Moisil 1963a]. В несколько упрощенном виде это выглядит так:

$$\vdash p =: \sim(\sim p \rightarrow p), \text{ т.е. } \vdash p \text{ есть } \sim\Diamond p \text{ или } \Box\sim p$$

$$p \Rightarrow q =: \vdash (\sim(p \rightarrow q)) \vee q \text{ [Карпенко 1997: 30]}^{15}.$$

Это позволяет дать аксиоматизацию L_3 на основе интуиционистской импликации \Rightarrow , что и было сделано Л. Итурриоз [Iturrioz 1977a].

Очевидно, что G_3 не эквивалентна L_3 , поскольку $\sim p$ нельзя выразить связками из G_3 . Однако если добавить связку \sim к G_3 , то, как показал Мойсил [Moisil 1963b: 146], получим L_3 :

$$p \rightarrow q =: (p \Rightarrow q) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p).$$

В [Cignoli 1982: 9] имеется упрощение:

$$p \rightarrow q =: (p \Rightarrow q) \vee \sim p.$$

3.3. Трехзначная логика Бочвара B_3

Другая известная трехзначная логика была построена русским логиком Д.А. Бочваром [Бочвар 1938] в связи с проблемой разрешения логических антиномий, в первую очередь парадокса Рассела. В данной системе третье истинностное значение предлагается интерпретировать не столько как промежуточное между истиной и ложью, сколько как парадоксальное значение или даже как «бессмыслица». Анализ логических и семантических парадоксов состоит в доказательстве бессмысленности парадоксальных высказываний. Поэтому логика Бочвара B_3 и называется логикой бессмысленности.

Логика B_3 имеет следующие исходные связки: \sim , \vdash и \cap , где $\sim p$ есть отрицание Лукасевича, $\vdash p$ имеет истинностную таблицу точно такую же, как $\Box p$ в L_3 , и называется внешним утверждением. Поскольку посредством связок \sim , \vee и \wedge из L_3 определима связка \cap :

¹⁵ Эта «упрощенная» формула в 2009 г. была неожиданно упрощена студенткой 4-го курса философского факультета МГУ (кафедра логики) Н.А. Знаменской:

$$p \Rightarrow q =: ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q.$$

$$p \cap q =: (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q),$$

то \mathbf{B}_3 есть подсистема \mathbf{L}_3 . Но \mathbf{B}_3 есть собственная подсистема \mathbf{L}_3 , так как из построения "нормальных форм" для \mathbf{B}_3 в [Финн 1971; 1974а] следует, что импликация Лукасевича \rightarrow не определима в \mathbf{B}_3 (точно так же, как неопределимы связки \vee и \wedge). Таким образом, \mathbf{B}_3 не является подсистемой \mathbf{G}_3 , а \mathbf{G}_3 не является подсистемой \mathbf{B}_3 .

Через $p \cap q$ и $\sim p$ обычным образом определяются другие связки (Д.А. Бочвар называет их *внутренними связками*):

$$p \cup q =: \sim(\sim p \cap \sim q),$$

$$p \supset q =: \sim p \cup q,$$

$$p \equiv q =: (p \supset q) \cap (q \supset p).$$

Тогда истинностные таблицы для внутренних связок выглядят следующим образом:

p	$\sim p$	\cup	1	$\frac{1}{2}$	0	\cap	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0

\supset	1	$\frac{1}{2}$	0	\equiv	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	1

Обратим внимание на яркую особенность внутренних связок, которая заключается в том, что приписывание хотя бы одному из аргументов значения $\frac{1}{2}$ оказывается достаточным для того, чтобы вся формула имела значение $\frac{1}{2}$. Такое свойство внутренних связок является следствием интерпретации $\frac{1}{2}$ как «бессмысленность», т. е. бессмысленность влечет за собой бессмысленность.

3.3.1. Два уровня \mathbf{B}_3 : внешние логические связки

Особую роль в \mathbf{B}_3 играет связка \vdash (будем обозначать ее как \Box), посредством которой следующим образом определяется отрицание \sim^\Box , дизъюнкция \cup^\Box , конъюнкция \cap^\Box , импликация \supset^\Box и эквиваленция \equiv^\Box :

$$\sim^{\square} p =: \sim \square p \text{ есть } \ulcorner p,$$

$$p \cup^{\square} q =: \square p \cup \square q,$$

$$p \cap^{\square} q =: \square p \cap \square q,$$

$$p \supset^{\square} q =: \square p \supset \square q,$$

$$p \equiv^{\square} q =: \square p \equiv \square q.$$

Эти связки Д.А. Бочвар называет *внешними* и они задаются следующими истинностными таблицами:

p	$\sim^{\square} p$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	1

\cup^{\square}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0

\cap^{\square}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0

\supset^{\square}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	1

\equiv^{\square}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	1
0	0	1	1

Отметим важную особенность приведенных истинностных таблиц, которая состоит в том, что внутри них имеются только истинностные значения 1 и 0. Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством \mathbf{B}_3^{\square} .

Под *фрагментом* некоторой логики \mathbf{L} с множеством связок F будем понимать логику \mathbf{L}' с множеством связок F' такую, что посредством F определимы связки из множества F' , но не наоборот. Отсюда следует, что \mathbf{B}_3^{\square} есть фрагмент логики \mathbf{B}_3 . Этот фрагмент оказался необычным. Адаптируя терминологию Д.А. Бочвара к языку настоящей работы, можно сказать, что \mathbf{B}_3^{\square} является *изоморфом* классической пропозициональной логики \mathbf{C}_2 . Последнее означает, что истинностные таблицы для логических связок \mathbf{B}_3^{\square} верифицируют аксиомы \mathbf{C}_2 (см. аксиоматизацию \mathbf{C}_2 посредством \supset и \neg в разделе 1.4), а правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Такие изоморфы будем называть *нормальными изоморфами*. Таким образом, логика \mathbf{B}_3 содержит фрагмент, изоморфный \mathbf{C}_2 .

В итоге, логика \mathbf{B}_3 имеет два уровня. Первый уровень образуют формулы с внутренними связками, второй уровень образуют формулы с внешними связками \mathbf{B}_3^\square . Внутренние формулы суть выразительные средства и представляют язык-объект, в котором рассматриваемые факты не могут быть доказаны; внешние формулы суть дедуктивные средства, с помощью которых доказываются утверждения о внутренних формулах, и в этом смысле внешние формулы представляют метаязык. Логикой внешнего уровня, как мы видели, является классическая логика \mathbf{C}_2 . Понятие «бессмысленность» в этом языке относится к формулам внутреннего уровня: бессмысленность некоторой формулы A означает, что приведено доказательство формулы « A не имеет смысла».

Пусть $\downarrow p$ представляет собой внешнюю связку с таблицей истинности, приведенной выше для ∇p (см. 3.1.2). Здесь содержательно $\downarrow p$ обозначает « p не имеет смысла» и определяется через исходные связки \mathbf{B}_3 так:

$$\downarrow p =: \sim(\Box p \cup \Box \sim p), \text{ или } \downarrow p =: p \equiv^\square \sim p.$$

Легко видеть, что в \mathbf{B}_3 формулы вида $\downarrow A$ не могут быть доказуемы, так как в \mathbf{B}_3 не может быть получена формула A , которая принимает значение $\frac{1}{2}$ при любом приписывании значений входящих в нее переменных. Только в этом случае A была бы доказуема. Но формулы вида $\downarrow A$ доказуемы в расширенном исчислении предикатов, в основе которого лежит пропозициональное исчисление \mathbf{B}_3 . Именно в получении доказательств формул вида $\downarrow A$ и заключается анализ парадоксов, предложенный Д.А. Бочваром.

3.3.1.1. Трехзначные изоморфы \mathbf{C}_2

Оказывается, \mathbf{B}_3 имеет еще один изоморф \mathbf{C}_2 . Поскольку, как уже говорилось, оператор $\vdash p$ есть $\Box p$, то имеем также оператор $\Diamond p$, который определяется стандартным образом: $\Diamond p =: \sim \Box \sim p$. Теперь определим *внешние* связки \sim^\diamond , $(\bar{})^\diamond$, \cup^\diamond , \cap^\diamond , \supset^\diamond и \equiv^\diamond аналогично тому, как определялись внешние связки в \mathbf{B}_3^\square , т.е. вместо оператора $\Box p$ перед каждой пропозициональной переменной ставится оператор $\Diamond p$. В результате имеем:

p	$\sim^\diamond p$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

\cup^\diamond	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
0	1	1	0

\cap^\diamond	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	0	0	0

\supset^\diamond	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	1	1	1

\equiv^\diamond	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0
0	0	0	1

Обозначим логику, основанную на этих связках, посредством \mathbf{B}_3^\diamond . Пусть выделенными значениями здесь являются 1 и $\frac{1}{2}$.

Легко проверить, что \mathbf{B}_3^\diamond является нормальным трехзначным изоморфом \mathbf{C}_2 . Таким образом, трехзначная логика Бочвара \mathbf{B}_3 имеет два нормальных изоморфа классической двузначной логики \mathbf{C}_2 , в которых правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Обратим внимание, что изоморфы \mathbf{B}_3^\square и \mathbf{B}_3^\diamond отличаются друг от друга соответственно тем, что в \mathbf{B}_3^\square истинностное значение $\frac{1}{2}$ отождествляется с 0, а в \mathbf{B}_3^\diamond с 1. При таком отождествлении свойства связок остаются классическими, что является подтверждением того, что верифицируются аксиомы \mathbf{C}_2 .

Такой путь доказательства “эквивалентности” \mathbf{B}_3^\square и \mathbf{C}_2 был предложен Н. Решером [Rescher 1969]. При этом он отмечает, что \mathbf{L}_3 содержит фрагмент \mathbf{B}_3^\diamond . Таким образом, возникает вопрос о фрагментах, изоморфных \mathbf{C}_2 , в других трехзначных логиках. Прорыв в этой области был совершен В.Е. Комендантским в дипломной работе [Комендантский 2000], где посредством компьютерной программы было вычислено, что \mathbf{L}_3 имеет 18 нормальных изоморфов \mathbf{C}_2 , 2 из которых с одним выделенным значением и 16 с двумя выделенными значениями. Более того, в [Девяткин 2004] вычислено, что трехзначная функционально полная логика (например, \mathbf{L}_3 , обогащенная функтором Слупецкого *Tr*) имеет 264 нормальных изоморфа, 8 из которых с одним выделенным значением и 256 с двумя выделенными значениями. Здесь же рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях существования в трехзначной логике определенного вида изоморфа \mathbf{C}_2 . См. также [Девяткин 2007; 2009].

Имеет смысл обобщить понятие изоморфа, введенного Д.А. Бочваром, а именно считать *обобщенным* изоморфом некоторый фрагмент трехзначной логики, в котором верифицируются аксиомы \mathbf{C}_2 , но не обязательно правило *modus ponens* сохраняет классическое отношение логического следования. Примерами таких

изоморфов являются \mathbf{B}_3^\square с двумя выделенными¹⁶ значениями и \mathbf{B}_3^\diamond с одним выделенным значением. Интересно, что в [Девяткин, Карпенко и Попов 2007] доказано, что логические матрицы для этих логик (с одним или двумя выделенными значениями) являются характеристическими для \mathbf{C}_2 .¹⁷ Метод доказательства предложен В.М. Поповым¹⁸.

Роль изоморфов \mathbf{C}_2 еще полностью не изучена. По-видимому, самое интересное в том, что некоторая логика \mathbf{L} , содержащая нормальный изоморф \mathbf{C}_2 , может быть аксиоматизирована как расширение \mathbf{C}_2 (развитие этой темы см. в разделах 6.3 и 7.5.3).

3.3.2. Аксиоматизация \mathbf{B}_3

В итоге можно констатировать, что логика \mathbf{B}_3 есть объединение внутренних и внешних логических связок. Как это выглядит в аксиоматической форме, впервые было показано В.К. Финном в [Финн 1971] (расширенный вариант этой статьи см. в [Финн 1974a]). Для этого при аксиоматизации \mathbf{B}_3 вводятся переменные двух сортов. Пусть p, q, r, \dots — пропозициональные переменные, принимающие значения из множества $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$; а u, v, w, \dots — сентенциональные переменные, принимающие значения из множества $\{1, 0\}$. Посредством A, B, C, \dots обозначаются произвольные формулы из \mathbf{B}_3 , посредством же A^0, B^0, C^0, \dots обозначаются внешние формулы из \mathbf{B}_3 . Исходными связками исчисления \mathbf{B}_3 являются \sim, \cap, \cup и \rightarrow (в наших обозначениях последняя связка есть \supset^\square)¹⁹.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r))$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
4. $p \cap q \rightarrow p$

¹⁶ Именно такие истинностные таблицы были представлены в [Malinowski 1997], где констатируется тот факт, что здесь верифицируются все аксиомы \mathbf{C}_2 , но правило *modus ponens* не сохраняет классическое отношение логического следования. Заметим, что уже таковой является логика Клини \mathbf{K}_3 с двумя выделенными значениями (см. 3.4.1). Изучению подобных изоморфов, но с одним выделенным значением, посвящена работа Л.Ю. Девяткина [Девяткин 2007].

¹⁷ О понятии логической матрицы и ее свойстве быть характеристической см. в следующей главе.

¹⁸ Естественно возникает более общий вопрос: при каких условиях произвольные (конечные) истинностные таблицы равны, т.е. имеют одно и то же множество тавтологий? Наверное, впервые эта проблема обсуждается в [Łoś 1949] и независимо от него в [Kalicki 1950; 1952].

¹⁹ Так как $\Box p =: (p \rightarrow p) \rightarrow p$, а $p \rightarrow q =: \sim \Box p \cup \Box q$, то системы связок \sim, \cap, \Box и $\sim, \cap, \cup, \rightarrow$ функционально эквивалентны.

5. $p \cap q \rightarrow q \cap p$
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \cap r))$
7. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \cup q \rightarrow r))$
8. $p \cup q \rightarrow q \cup p$
9. $(p \cup q) \cup r \leftrightarrow p \cup (q \cup r)$
10. $p \cap q \rightarrow q \cap p$
11. $(p \cup q) \cap r \leftrightarrow (p \cap r) \cup (q \cap r)$
12. $r \cap (p \cup q) \leftrightarrow (r \cap p) \cup (r \cap q)$
13. $p \leftrightarrow \sim \sim p$
14. $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$
15. $p \rightarrow (\sim q \rightarrow (\sim(p \rightarrow q)))$
16. $\sim p \rightarrow (p \cup q \leftrightarrow q)$
17. $\sim p \cap \sim q \leftrightarrow \sim(p \cup q)$
18. $\sim p \cup \sim q \leftrightarrow \sim(p \cap q)$
19. $p \rightarrow v \cup p$
20. $(\sim v \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow v)$
21. $\sim \downarrow v$
22. $\downarrow p \rightarrow \downarrow(p \cup q)$
23. $\Box p \cap \downarrow q \rightarrow \sim(p \rightarrow q).$

Правила вывода:

- R1. *Modus ponens*.
- R2. Обычная подстановка: вместо p подставляется формула B .

R3. Ограниченная подстановка: вместо v подставляется B^0 .²⁰

Исчисление, эквивалентное B_3 , построено также в [Piróg-Rzepiecka 1973] под названием W . Значительно более простая аксиоматизация B_3 , чем приведенная выше, принадлежит А.Т. Ишмуратову [Ишмуратов 1974]. Эта аксиоматизация упроще-

²⁰ В этой же работе дается аксиоматизация логики B_3^T , которая есть расширение B_3 посредством добавления к последней связки Слупецкого Tr (см. выше 3.1.1). Заметим, что в отличие от L_3^T , B_3^T не является функционально полной, поскольку в ней не определима импликация Лукасевича \rightarrow .

на в [Ишмуратов 1981], где \mathbf{B}_3 положена в основу специальной системы временной логики.

Подчеркнем, что в приведенной выше аксиоматизации \mathbf{B}_3 верифицируются не все законы классической пропозициональной логики \mathbf{C}_2 , например, не имеет места контрапозиция $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$. Однако, имея в виду, что \mathbf{B}_3 содержит фрагмент, изоморфный \mathbf{C}_2 , естественно было бы посредством внешних формул задать аксиоматизацию классической логики \mathbf{C}_2 . Тогда аксиоматизацию самой \mathbf{B}_3 можно представить как расширение \mathbf{C}_2 , что и было сделано Р. Григолия и В.К. Финном в [Finn and Grigolia 1993: 235-236]. В качестве исходных связок берутся следующие: \cup , \cap , \sim , J_0 , $J_{1/2}$, J_1 , где J_0 есть $\bar{}$, $J_{1/2}$ есть \downarrow и J_1 есть \Box . Аксиоматизация исключительно громоздкая (29 аксиомных схем плюс сокращения), но с единственным правилом вывода МР.

Наконец, обзор работ в области логик бессмысленности с обстоятельной библиографией можно найти в книге [Piróg-Rzepecka 1977]²¹.

3.3.3. Логика Холдена \mathbf{H}_3 и логика Эббингауза \mathbf{E}_3

С. Холден [Halldén 1949] конструирует трехзначную логику \mathbf{H}_3 (Холден обозначает её посредством \mathbf{C}) с двумя выделенными значениями, в которой независимо от Д.А. Бочвара третье истинностное значение интерпретируется как “бессмысленность”. Логика \mathbf{H}_3 имеет следующие исходные связки $\sim p$, $p \cap q$ и $\sim \downarrow p$. (Связка $\sim \downarrow$ в дальнейшем будет встречаться, поэтому обозначим её посредством Δ). Легко показать, что логика \mathbf{H}_3 содержится в \mathbf{B}_3 , но не наоборот, т.е. расширение \mathbf{H}_3 одним из модальных операторов $\Box p$ или $\Diamond p$ превращает \mathbf{H}_3 в \mathbf{B}_3 . Отсюда следует, что логика \mathbf{H}_3 вообще не имеет нормальных изоморфов \mathbf{C}_2 . К этому интересному факту мы вернемся в разделе (7.5.3).

К. Сегерберг [Segeberberg 1965], исходя из работы С. Холдена, конструирует несколько трехзначных систем логики бессмысленности, одной из которых является не что иное, как трехзначная логика Бочвара \mathbf{B}_3 с теми же самыми исходными связками, но с двумя выделенными значениями.

Представляет интерес расширение \mathbf{B}_3 , которое представлено в [Ebbinghaus 1969] (см. также [Finn and Grigolia 1993]). Здесь к \mathbf{B}_3 добавляется дизъюнкция \vee^E :

²¹ Добавим работу [Morawiec and Piróg-Rzepecka 1985], где получены новые результаты относительно предикатной логики \mathbf{W} (см. также [Бочвар и Финн 1976, §3]).

\vee^E	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	0	0

Полученная система обозначается как E_3 . Обратим внимание, что E_3 может быть представлена как расширение B_3 посредством добавления импликации Собочиньского, \supset_s (см. ниже раздел 3.5.2.1), поскольку $p \vee^E q =: \sim p \supset_s q$ и $p \supset_s q =: \sim p \vee^E q$.

3.4. Трехзначные (регулярные) логики Клини

Здесь мы рассмотрим класс *регулярных* трехзначных логик Клини, самой известной из которых является сильная логика Клини K_3 . Слабая логика Клини K_3^W есть не что иное, как логика с внутренними связками Бочвара. Недавно была открыта промежуточная (регулярная) логика Клини K_3^{\rightarrow} (логика **Lisp**). Ее свойства оказались весьма необычными, а именно дизъюнкция и конъюнкция *некоммутативны*. Особый интерес здесь представляет *промежуточная p-логика*.

3.4.1. Сильная логика Клини K_3

Разработка теории рекурсивных функций приводит к идее не всюду определенной (частичной) функции. В [Kleene 1938] С. Клини конструирует трехзначную логику K_3 (см. также [Клини 1957, § 64]), в которой введение логических связок должно моделировать рекурсивные функции, вычисление значения которых никогда не заканчивается. Отсюда третье истинностное значение может интерпретироваться как «не определено», «неизвестно», «неразрешимо». Таким образом, третье истинностное значение вводится не по онтологическим соображениям, как у Лукасевича, а скорее по эпистемологическим.

Опять же возникает проблема определения трехзначных логических связок. С. Клини приходит к выводу, что эти связки должны определяться *регулярными* таблицами в следующем смысле: «*данный столбец (строка) содержит 1 в строке (столбце) для $\frac{1}{2}$ только при условии, что этот столбец (строка) состоит целиком из 1; аналогично для 0*».

В итоге С. Клини дает следующее табличное определение логических связок:

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

\vee	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

\wedge	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

\supset	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

\equiv	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Содержательная интерпретация логических связок, например, дизъюнкции $p \vee q$, выглядит следующим образом: дизъюнкция: $p \vee q$ истинна, если p истинно (и здесь ничего не надо говорить о q) или q истинно (и здесь ничего не надо говорить о p), ложна, если p и q оба ложны; определена только в этих случаях (а поэтому не определена в остальных). В результате $p \vee q$ в \mathbf{K}_3 имеет ту же самую истинностную таблицу, что и $p \vee q$ в \mathbf{L}_3 . Совпадают истинностные таблицы также для $p \wedge q$ и $\sim p$, т.е. \mathbf{K}_3 является фрагментом \mathbf{L}_3 .

Итак, приведенные таблицы позволяют установить принципиальную неравноправность значения $\frac{1}{2}$ со значениями 1 и 0, поскольку, в отличие от 1 и 0, $\frac{1}{2}$ не несет никакой информации или, по-другому, выражает факт отсутствия информации.

Только что рассмотренные регулярные истинностные таблицы С. Клини называет *сильными* (strong), и при этом они определяются как самые сильные из возможных регулярных расширений классических двузначных таблиц, т.е. они регулярны и имеют 1 или 0 в каждом месте, где какое-либо регулярное расширение 2-значных таблиц может содержать 1 или 0 (что именно: 1 или 0, — это определено однозначно). Соответствующие связки названы *сильными*.

Примером нерегулярной истинностной таблицы как раз является таблица для импликации Лукасевича \rightarrow . Отсюда видно, что принципиальное отличие \mathbf{K}_3 от \mathbf{L}_3 состоит только в том, что в \mathbf{K}_3 $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, а в \mathbf{L}_3 $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = 1$. Но тогда импликацию в \mathbf{K}_3 можно определить, как это делается в \mathbf{C}_2 , т.е. $p \supset q =: \sim p \vee q$, и это позволяет развивать трехзначную логику \mathbf{K}_3 не включая \supset в качестве исходной связки. Однако в силу таких свойств импликации различие

между K_3 и L_3 оказалось настолько существенным, что в K_3 при выделенном значении 1 вообще не существует тавтологий. Это следует из того простого факта, что все связки K_3 сохраняют значение $1/2$, когда только оно приписывается аргументам.

Совсем другая ситуация возникает, если рассмотреть логику с исходными связками как в K_3 , но с двумя выделенными значениями: 1 и $1/2$. Подобную логику обозначим посредством K_3^2 . В [Rescher 1969: 116-117] утверждается, что класс тавтологий K_3^2 совпадает с классом тавтологий классической логики C_2 (правило МР здесь не сохраняет тавтологию). Специально логике K_3^2 и доказательству этого утверждения посвящена статья [Martin 1975] (см. также [Epstein R.L. 1990: 252]).

Р. Эпштейн это делает следующим образом. Покажем, что формула A не является классической тавтологией, т.т.т., когда найдется такая оценка e в K_3 , что $e(A) = 0$.

Каждая оценка v в C_2 есть оценка в K_3 , и если формула принимает значение 0 при некоторой оценке в C_2 , то она принимает значение 0 в K_3 при этой же оценке. Теперь пусть найдется оценка e в K_3 такая, что $e(A) = 0$. Определим оценку e' в C_2 следующим образом: $e'(p) = 1$, т.т.т., когда $e(p) \in \{1, 1/2\}$ и $e'(p) = 0$, т.т.т., когда $e(p) = 0$. Легко доказать индукцией по построению формулы, что, если $e(B) = 0$, то $e'(B) = 0$, и если $e(B) \neq 0$, то $e'(B) \neq 0$. Таким образом, $e(A) = 0$ и неверно, что A общезначима в C_2 . Эпштейн также отмечает, что внутренний фрагмент трехзначной логики Бочвара обладает аналогичными свойствами,

Долгое время считалось, по аналогии с K_3^2 , что множество тавтологий трехзначной логики с исходными связками как в L_3 , но с двумя выделенными значениями 1 и $1/2$ (обозначим подобную логику посредством L_3^2), также совпадает с C_2 . Однако А. Тюркетт (см. [Rescher 1969: 27]) нашел контрпример:

$$\sim(p \rightarrow \sim p) \vee \sim(\sim p \rightarrow p)^{22}.$$

Эта формула является классической тавтологией, но в L_3^2 , когда p принимает значение $1/2$, вся формула принимает значение 0.

Так как в K_3 нет тавтологий, то логику K_3 удобно представлять в терминах отношения следования. Естественное обобщение клас-

²² Н.А. Знаменская (см. сноску 15) нашла другой контрпример:

$$\sim((p \vee \sim p) \rightarrow (p \wedge \sim p))$$

и обратила внимание на то, что если формула A есть классическая тавтология, а формула B есть классическое противоречие, и A и B не содержат вхождений импликации, то формула $\sim(A \rightarrow B)$ принимает значение 0 в L_3^2 , когда пропозициональные переменные принимают значение $1/2$. Таким образом, определен целый класс соответствующих формул.

сического определения логического следования (см. 1.4) выглядит следующим образом: *высказывание B логически следует из высказывания A т.т.т., когда всегда, если A принимает выделенное значение, то B также принимает выделенное значение*²³. Пусть D есть множество выделенных значений. Таким образом, данное логическое следование сохраняет D и обозначается посредством \models_D . В литературе встречается также другое определение логического следования, названного *компаративным* (comparative) и которое обозначается посредством \models_C : *высказывание B логически следует из высказывания A т.т.т., когда истинностное значение высказывания B не ниже, чем значение высказывания A* . Аксиоматизация \models_C для K_3 в виде исчисления секвенций дана в [Cleave 1974], аксиоматизация \models_D для K_3 дана в [Urquhart 1986]. Как отмечается в [Bendová 2005], оба отношения логического следования равнообъемны для трехзначной логики Гейтинга G_3 , поскольку G_3 имеет классическую теорему дедукции²⁴. Развитие этой темы, а именно условия эквивалентности \models_D и \models_C для четырехзначной логики Белнапа B_4 см. ниже в разделе 5.4.2.

3.4.2. Слабая логика Клини K_3^w

Другим примером регулярных таблиц (как самых слабых) являются истинностные таблицы, которые получаются из классических двухзначных таблиц путем заполнения символом $\frac{1}{2}$ строки и столбца, озаглавленных символом $\frac{1}{2}$. Эти таблицы есть в точности истинностные таблицы для внутренних связок логики Бочвара B_3 (см. 3.3). Эти связки Клини называет *слабыми* (weak) связками. Трехзначную логику со слабыми логическими связками обозначим посредством K_3^w .

Легко видеть, что в K_3^w , как и в K_3 , нет тавтологий при выделенном значении 1, а при двух выделенных значениях K_3^w (как и K_3) является обобщенным изоморфом C_2 .

Казалось бы, ничего интересного: сильная логика Клини K_3 есть фрагмент трехзначной логики Лукасевича L_3 , а слабая логика Клини K_3^w есть фрагмент трехзначной логики Бочвара B_3 . Но впервые логики K_3 и K_3^w рассмотрены в их самостоятельном значении, особенно первая.

²³ Для простоты мы рассматриваем логическое следование как отношение между отдельными формулами, имея в виду, что возможно обобщение на множества формул.

²⁴ Унифицированный подход к "базисным" трехзначным логикам с точки зрения свойств логического следования см. в [Avron 1991a].

Ситуация резко меняется, если мы заинтересуемся вопросом о существовании других регулярных трехзначных логик Клини. Впервые на такую возможность указал М. Фиттинг [Fitting 1992].

3.4.3. Регулярность и монотонность

В соответствии с данным Клини описанием регулярности можно дать следующее определение этого свойства. Произвольная пропозициональная связка (обозначим ее \bullet) является *регулярной*, если для всякого α из множества истинностных значений $\{1, \frac{1}{2}, 0\}$ выполняются следующие условия:

$$(\frac{1}{2} \bullet \alpha) = 1 \Rightarrow (1 \bullet \alpha) = (0 \bullet \alpha) = 1;$$

$$(\frac{1}{2} \bullet \alpha) = 0 \Rightarrow (1 \bullet \alpha) = (0 \bullet \alpha) = 0;$$

$$(\alpha \bullet \frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow (\alpha \bullet 1) = (\alpha \bullet 0) = 1;$$

$$(\alpha \bullet \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow (\alpha \bullet 1) = (\alpha \bullet 0) = 0.$$

Сильные и слабые связки Клини являются регулярными в этом смысле. Соответственно многозначная логика регулярна, если все ее связки регулярны в смысле Клини.

В современной литературе получило широкое освещение такое свойство трехзначных логик, как монотонность. Так, свойство монотонности сильных трехзначных связок логики Клини K_3 использовано Крипке [Kripke 1975] при построении новой теории истинности²⁵. Строгое математическое определение *монотонности* выглядит следующим образом:

Пусть F — функция, $\{1, 0, \frac{1}{2}\}^n \rightarrow \{1, 0, \frac{1}{2}\}$, где n — натуральное число и $\{1, 0, \frac{1}{2}\}^n$ — n -ая декартова степень множества $\{1, 0, \frac{1}{2}\}$. Функция F называется *трехзначной монотонной* относительно данного частичного порядка \leq на множестве $\{1, 0, \frac{1}{2}\}^n$ т.т.т., когда для каждого d_i, d_j из $\{1, 0, \frac{1}{2}\}^n$ верно следующее: если $d_i \leq d_j$ то $F(d_i) \leq F(d_j)$.

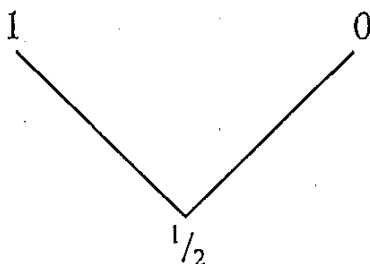
Логика называется *трехзначной монотонной* относительно данного частичного порядка на $\{1, 0, \frac{1}{2}\}$, т.т.т., когда все ее функции являются монотонными относительно данного частичного порядка.

Отношение \leq на упорядоченных двойках d_i, d_j устанавливается с учетом заданного порядка между тремя значениями $\{1, 0, \frac{1}{2}\}$. Например, принято считать, что в логике Лукасевича между тремя

²⁵ В [Cain and Damnjanovic 1991] крипковская теория истины рассмотрена с использованием слабой трехзначной логики Клини K_3^W .

истинностными значениями существует следующее отношение порядка: $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$.

Иногда предполагается, вслед за Клини, что третье значение $\frac{1}{2}$ принципиально неравноправно с двумя классическими 1 и 0, поскольку оно не столько несет какую-либо информацию, сколько свидетельствует о ее отсутствии. Поэтому постулируется следующее отношение порядка на множестве $\{1, 0, \frac{1}{2}\}$ (см. [Fitting 1992]):



То есть $\frac{1}{2} \leq 1$ и $\frac{1}{2} \leq 0$ и при этом 1 и 0 несравнимы. Мы будем придерживаться, вслед за Фиттингом, следующего отношения порядка (*):

$$\frac{1}{2} \leq 1, \frac{1}{2} \leq 0, 1 \leq 1, 0 \leq 0, \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Этот порядок выбран с целью решения задачи Фиттинга [Fitting 1994] о нахождении всех монотонных регулярных нормальных логик, промежуточных между сильной и слабой логиками Клини.

В [Комендантская 2009] доказано, что при так заданном порядке класс монотонных трехзначных логик совпадает с классом регулярных трехзначных логик и таких логик всего 4: K_3 , K_3^w , K_3^{\rightarrow} и K_3^{\leftarrow} .

3.4.4. Промежуточная логика Клини K_3^{\rightarrow} (логика Lisp)

В [Fitting 1994] описывается регулярная логика, которая является промежуточной между K_3 и K_3^w .

Такая промежуточная логика была названа **Lisp**. М. Фиттинг следующим образом описывает логику **Lisp**: допустим, нам необходимо оценить выражение $p \wedge q$, это необходимо делать последовательно, скажем слева направо, так что предложение p мы оцениваем первым. Если p приписано значение «ложь», то работа по приписыванию значений останавливается и всему выражению приписывается значение «ложь». Если p интерпретируется как «истина», то далее проводится приписывание значения q , и значение q становится значением всего выражения $p \wedge q$. Если p «не определено» ($\frac{1}{2}$), то всему выражению приписывается значение $\frac{1}{2}$, вне зависимости от того, какого значения q . Это асимметричная или по-

зиционная логика²⁶. Например, если p — «ложно», а q — «не определено», то выражение $p \wedge q$ будет ложным, а $q \wedge p$ примет значение $\frac{1}{2}$, т.е. логическая связка \wedge (а также \vee) некоммутативна.

Связки логики **Lisp**, условимся обозначать ее как K_3^{\rightarrow} , могут быть представлены следующим образом (см. [Lukyanowskaya 2003]):

p	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

\vee^{\rightarrow}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

\wedge^{\rightarrow}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0

\supset^{\rightarrow}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1

\equiv	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Эта логика является регулярной в смысле Клини и монотонной в смысле (*).

3.4.4.1. Промежуточная логика Клини K_3^{\leftarrow} (логика Twin Lisp)

Оказывается, имеется еще одна регулярная логика Клини, которая в [Lukyanowskaya 2003] обозначается посредством K_3^{\leftarrow} :

P	$\sim p$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

\vee^{\leftarrow}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

\wedge^{\leftarrow}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0

²⁶ С. Клини в своей книге [Клини 1973: 82] приводит лингвистический пример некоммутативной конъюнкции: «Хотя в исчислении высказываний $A \& B$ равносильно $B \& A$, фразы «У Джейн родился ребенок и она вышла замуж» и «Джейн вышла замуж и у нее родился ребенок» будут пониматься знакомыми Джейн по-разному». Далее Клини отмечает, что подобные затруднения в трактовке классической конъюнкции возникают при анализе причинно-следственных или временных высказываний.

\supset^{\leftarrow}	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1

\equiv	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	$\frac{1}{2}$	1

Эта логика также является регулярной и монотонной в смысле (*).

3.4.5. Взаимоотношения между регулярными логиками Клини

В общем случае логика Z может быть названа *промежуточной* между логиками X и Y , причем $X \subseteq Y$, если и только если $Z \subseteq Y$ и $X \subseteq Z$, где отношение *включения* \subseteq имеет место, когда все связки одной системы могут быть определены через связки другой, т.е. одна логика функционально вложима в другую. Если имеет место также обратное, то получаем, как уже говорилось, функциональную эквивалентность.

Ранее мы это часто использовали, например, связки логики K_3 могут быть определены через связки логики L_3 , т.е. $K_3 \subseteq L_3$. Точно так же $G_3 \subseteq L_3$ и $B_3 \subseteq L_3$. В свою очередь, $G_3 \not\subseteq B_3$ и $B_3 \not\subseteq G_3$, а S_3 функционально эквивалентна L_3 (см. раздел 3.1.2).

Перейдем теперь к рассмотрению отношений между регулярными трехзначными логиками.

Первый результат в этом направлении был получен В.К. Финном [Финн 1974а: 425], который определил слабые связки Клини через сильные:

$$p \cap q =: (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q).$$

Двойственным образом определяется $p \cup q$:

$$p \cup q =: (p \vee q) \wedge ((p \vee \sim p) \wedge (q \wedge \sim q)).$$

То есть было показано, что $K_3^w \subseteq K_3$.

В [Комендантская 2009] показано, что между всеми четырьмя логиками K_3 , K_3^w , K_3^{\rightarrow} , K_3^{\leftarrow} существует отношение включения, и таким образом доказано высказанное Фиттингом предположение о том, что все регулярные связки, отличные от K_3 и K_3^w , являются промежуточными между K_3 и K_3^w .

Для доказательства надо определить связки **Lisp** через сильные связки и слабые связки через связки **Lisp**.

Выразимости могут быть осуществлены следующим образом:

$$p \cup q =: (p \vee^{\rightarrow} q) \wedge^{\rightarrow} (q \vee^{\rightarrow} p),$$

$$p \vee^{\rightarrow} q =: \sim(p \vee \sim q) \vee p.$$

Итак, $K_3^{\rightarrow} \subseteq K_3$, а $K_3^w \subseteq K_3^{\rightarrow}$.

Обратное же не имеет места. То, что нельзя посредством слабых связок определить сильные связки, то есть $K_3 \not\subseteq K_3^w$ — очевидно. Остается показать, что $K_3^{\rightarrow} \not\subseteq K_3^w$, $K_3 \not\subseteq K_3^{\rightarrow}$. Последнее следует из работы Фиттинга [Fitting 1994]. Однако строгое доказательство данного факта является открытой проблемой.

Возникает вопрос о взаимоотношении промежуточных регулярных логик K_3^{\rightarrow} и K_3^{\leftarrow} . Оказывается, они функционально эквивалентны:

$$p \vee^{\rightarrow} q =: q \vee^{\leftarrow} p$$

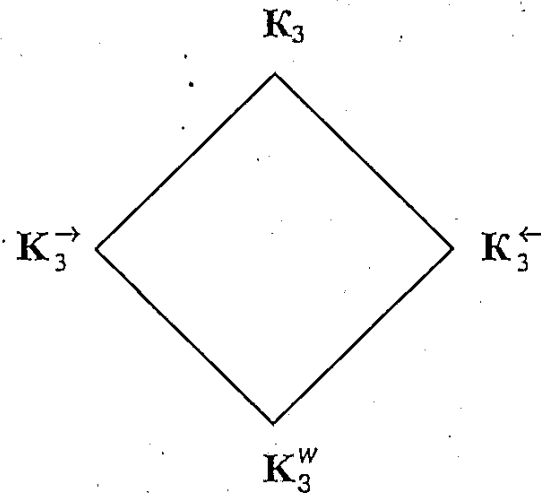
$$p \vee^{\leftarrow} q =: q \vee^{\rightarrow} p$$

$$p \wedge^{\rightarrow} q =: q \wedge^{\leftarrow} p$$

$$p \wedge^{\leftarrow} q =: q \wedge^{\rightarrow} p.$$

Таким образом, $K_3^{\rightarrow} \subseteq K_3^{\leftarrow}$ и $K_3^{\leftarrow} \subseteq K_3^{\rightarrow}$.

Поскольку \subseteq является отношением порядка, то взаимоотношение между трехзначными регулярными логиками Клини можно представить в виде четырехэлементной решетки (см. [Комендатская 2009]):



Заметим, что в [Томова 2009с] представлен интересный подкласс регулярных четырехзначных логик Клини.

В конце этой главы мы остановимся на классификации импликативных расширений регулярных логик Клини [Томова 2010], а сейчас суммируем свойства таких логик, которые получаются из

регулярных логик Клини посредством замены инволюции \sim на трехзначное отрицание Гейтинга \neg и на дуальное ему отрицание \neg .

3.4.6. Р-логики

По аналогии с понятием p -алгебры и дважды p -алгебры (см. ниже раздел 4.4.2) введем понятие p -логики и дважды p -логики [Карпенко 2008]. Логику со связками $\{\vee, \wedge, \neg\}$ назовём p -логикой, логику со связками $\{\vee, \wedge, \neg\}$ назовём дуальной p -логикой, а логику со связками $\{\vee, \wedge, \neg, \neg\}$ назовём дважды p -логикой.

Оказывается, посредством трехзначных связок \neg, \neg, \vee и \wedge можно определить отрицание Лукасевича [Cignoli and Monteiro 1965]:

$$\sim p =: \neg p \vee (p \wedge \neg p)^{27}.$$

Более того, посредством этих связок можно определить также импликацию Гейтинга [Varlet 1969]:

$$p \Rightarrow q =: (\neg p \vee \neg \neg q) \wedge (\neg p \vee q).$$

Поскольку

$$p \rightarrow q =: (p \Rightarrow q) \vee \sim p \text{ [Cignoli 1982]},$$

то получаем

$$p \rightarrow q =: ((\neg p \vee \neg \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \vee (\neg p \vee (p \wedge \neg p))^{28}.$$

Итак, исходные связки \sim и \rightarrow трехзначной логики Лукасевича \mathbb{L}_3 выразимы посредством связок \vee, \wedge, \neg и \neg . Поскольку посредством связок Лукасевича \rightarrow и \sim выразимы связки \vee, \wedge, \neg и \neg , то эти логики функционально эквивалентны. Таким образом, \mathbb{L}_3 есть трехзначная дважды p -логика.

Перейдем к промежуточным p -логикам. Сначала покажем, что системы трехзначных связок промежуточных p -логик $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \neg\}$ и $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \neg\}$ функционально эквивалентны. Это можно сделать так [Томова 2009b]:

$$\neg p =: \neg(\neg(p \wedge^{\rightarrow} \neg p) \vee^{\rightarrow} \neg p)$$

$$\neg p =: \neg(\neg p \wedge^{\rightarrow} \neg p) \vee^{\rightarrow} \neg p.$$

Неожиданным образом оказалось, что посредством системы связок $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \neg\}$ можно представить систему связок $\{\rightarrow, \sim\}$, т.е.

²⁷ Заметим, что уже Г. Мойсилу [Moisil 1942] было известно, что отрицание Лукасевича можно выразить посредством \neg и \neg с дизъюнкцией и конъюнкцией.

²⁸ Имеется упрощение (Н.А. Знаменская):

$$p \rightarrow q =: (\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee (p \wedge \neg p).$$

промежуточная p -логика есть трехзначная логика Лукасевича \mathbf{L}_3 (!) Это можно сделать следующим образом (см. [Томова 2009b]):

$$\sim p =: ((p \wedge^{\rightarrow} \top p) \vee^{\rightarrow} \top p)$$

$$p \rightarrow q =: (\top(\sim p) \wedge^{\rightarrow} (p \wedge^{\rightarrow} q)) \vee^{\rightarrow} (\sim(\top q \vee^{\rightarrow} \sim(p \vee^{\rightarrow} q)))^{29}.$$

Отсюда, например, следует, что логики со связками $\{\vee, \wedge, \top, \sim\}$ и $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \top\}$ функционально эквивалентны.

Но совсем неожиданно оказалось, что трехзначная *дважды слабая* p -логика со связками $\{\cup, \cap, \top, \sqcap\}$ есть *слабая* p -логика, а последняя есть трехзначная логика Бочвара³⁰:

$$\sqcap p =: \top(\top(p \cap \top p) \cup \top p)$$

$$\top p =: \sqcap(\sqcap(p \cap \sqcap p) \cup \sqcap p)$$

$$\sim p =: ((p \cap \top p) \cup \top p)$$

$$\sqcup p =: \top \sim p.$$

Об алгебраической характеристизации указанных трехзначных p -логик см. ниже в разделе 4.5.2.

3.5. Трехзначные паранепротиворечивые логики

Еще одним направлением в области трехзначных логик стало конструирование *паранепротиворечивой* логики \mathbf{PL} . Неформально говоря, логика называется паранепротиворечивой, если «из противоречия не следует все, что угодно», т.е. из A и $\sim A$ в общем случае не следует B . Поскольку противоречие A и $\sim A$ полностью «разрушает» теорию, построенную на классической логике, делая ее тривиальной (т.е. такой, в которой выводимо любое утверждение), то естественно возникает желание рассмотреть такие модификации логики, в которых принцип «из противоречия следует все» не действует и на основе которых могут быть построены противоречивые, но не тривиальные теории.

Общая проблема в таком виде была поставлена и частично решена С. Яськовским [Jaśkowski 1948a]. В этой работе формулируется главный формальный критерий, которому должна удовлетворять паранепротиворечивая логика \mathbf{PL} : закон Дунса Скота («принцип сверхполноты» у Яськовского)

²⁹ Имеется упрощение (Н.А. Знаменская):

$$(\top(\top q \vee^{\rightarrow} p) \wedge^{\rightarrow} (\top p \wedge^{\rightarrow} p)) \vee^{\rightarrow} (p \wedge^{\rightarrow} \top p) \vee^{\rightarrow} (\top p \vee^{\rightarrow} q).$$

³⁰ Этот факт обнаружен Н.Е. Томовой в 2009 г.

$$p \supset (\sim p \supset q)$$

не имеет места в **PL**.

В упомянутой выше работе Яськовский приводит пример трехзначной **PL**, но логические связи в ней такие, что имеет место следующий закон, известный уже Лукасевичу:

$$p \supset (\sim p \supset (\sim \sim p \supset q)).$$

На этом основании Яськовский отвергает трехзначную **PL**. Назовем приведенную выше формулу формулой Лукасевича.

Тем не менее, трехзначные паранепротиворечивые логики привлекли к себе большое внимание. Содержательно высказывания трехзначной паранепротиворечивой логики, имеющие промежуточное истинностное значение, можно проинтерпретировать как высказывания, термины которых имеют такой денотат, что смысл этих высказываний противоречив, и поэтому они становятся и истинными и ложными одновременно, например, «это утверждение ложно» или «расселово множество является элементом самого себя». Отсюда промежуточное истинностное значение в различных трехзначных паранепротиворечивых логиках интерпретируется как «антиномично», «парадоксально», «противоречиво». В силу этого появляются семантические средства, позволяющие анализировать парадоксы типа «Лжец».

Еще из многочисленных применений паранепротиворечивой логики выделим то, которое связано с обработкой противоречивой информации компьютером. В связи с этим см. в разделе (5.4.4) конструирование Н. Белнапом четырехзначной логики, обозначившей целое направление в современной логике. К паранепротиворечивым логикам мы вернемся в разделе 8.6.

3.5.1. Логика Приста LP

По существу первой *трехзначной* паранепротиворечивой логикой является логика K_3^2 (см. выше раздел 2.4.1), предложенная в качестве паранепротиворечивой Ф. Асеньо [Asenjo 1953] и обстоятельно развитая Г. Пристом [Priest 1979; 1984a], который обозначает ее посредством **LP**. Как мы уже говорили, множество тавтологий K_3^2 совпадает с множеством тавтологий классической логики C_2 . Это значит, что закон Дунса Скота имеет место в **LP**, но правило **MP** в **LP** не сохраняет тавтологию и поэтому, имея A и $\sim A$, из закона Дунса Скота по правилу **MP** не получим B . В итоге, при стандартном определении отношения логического следования \models_D (см. выше 3.4.1) следующие утверждения не верны:

1. $(A \wedge \sim A) \models B$.
2. $A, \sim A \vee B \models B$.
3. $A \supset B, B \supset C \models A \supset C$.
4. $A \supset B, A \models B$.

5. Если A и B не содержат общих пропозициональных переменных и если B принимает значение 0, то $A \not\models B$.

Таким образом, логика **LP** отлична от логики C_2 , несмотря на то что множества тавтологий в этих логиках совпадают.

Заметим, что логика **LP** положена Пристом в основание паранепротиворечивой теории множеств. Алгебраическое изучение **LP** и ее расширения см. в [Pynko 1995a; 2000].

3.5.2. Логика **PCont**

Однако наиболее известной трехзначной паранепротиворечивой логикой, которая была построена в разное время и в разных странах независимым образом, является следующая. Берется K_3^2 , но в определении связки импликации имеется существенное изменение: вместо $\frac{1}{2} \supset 0 = \frac{1}{2}$ берется $\frac{1}{2} \supset 0 = 0$. Такую импликацию обозначим посредством $p \supset_J q$.³¹

Она появляется в [D'Ottaviano and da Costa 1970] и используется в [da Costa 1974], хотя впервые появилась в [Jaśkowski 1948a]. В [Asenjo and Tamburino 1975], [Batens 1980] (под названием **PI**⁸), [Розоноэр, 1983a; 1983b], [Rozonoer 1989] (под названием **PCont**), [Avron 1986] (под названием **RM**₃²) эта логика была переоткрыта независимо друг от друга и представлена её аксиоматизация. Систематически она изучена Л.И. Розоноэром, который исходил из некоторых идей Д.А. Бочвара. Им же предложен предикатный вариант **PCont** (см. также [Розоноэр 1993]).

PCont содержит весь позитивный фрагмент классической логики C_2 ,³² плюс следующие классические формулы с отрицанием: $p \vee \sim p$, $\sim \sim p \approx p$, $\sim(p \supset_J q) \approx (p \wedge \sim q)$ и законы Де Моргана

$$\sim(x \vee y) \approx \sim x \wedge \sim y$$

$$\sim(x \wedge y) \approx \sim x \vee \sim y,$$

где $p \approx q =: (p \supset_J q) \wedge (q \supset_J p)$. Но не все классические тавтологии с отрицанием имеют место в **PCont**, например, закон Дунса Скота,

³¹ Обратим внимание, что точно так, как импликация Клини $p \supset q$ отличается от импликации Лукасевича $p \rightarrow q$ только тем, что $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, то и импликация Яськовского $p \supset_J q$ отличается от импликации Гейтинга $p \Rightarrow q$ только тем, что $\frac{1}{2} \supset \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Более того, $p \supset_J q$ стандартным образом определима в p -логике:

$$p \supset_J q =: \neg p \vee q.$$

³² Этот фрагмент состоит из первых восьми формул в аксиоматизации C_2 (см. раздел 1.4), плюс закон Пирса $((p \supset q) \supset p) \supset p$.

добавление которого к **PCont** превращает последнюю в C_2 . Изысканное секвенциальное исчисление для **PCont** построено в [Попов 1989].

Отметим также, что исчисление **PCont** является *максимальным* в том смысле, что между **PCont** и C_2 нет промежуточного исчисления [Batens 1980]. Другими словами, C_2 является единственным собственным непротиворечивым расширением **PCont**.

3.5.2.1. Логика **PCont** как **RM3**

В русле борьбы с парадоксами материальной импликации, например такими, как закон утверждения консеквента $p \supset (q \supset p)$, Б. Собочиньским [Sobociński 1952] была предложена трехзначная логика S_3 с двумя выделенными значениями. Отрицание здесь есть не что иное, как отрицание в **PCont**, а импликация имеет то отличие от **PCont**, что вместо $1 \supset \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ берется $1 \supset \frac{1}{2} = 0$. Такую импликацию обозначим посредством $p \supset_s q$. В силу ее важности для классификации импликативных расширений трехзначных регулярных логик Клини приведем ее табличное определение³³:

\supset_s	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

Дизъюнкция и конъюнкция в логике Собочиньского не являются *max* и *min* соответственно (как в K_3), и определимы через отрицание и импликацию. Логическая матрица со связками \sim , \rightarrow_s и с дизъюнкцией и конъюнкцией как *max* и *min* появляется в [Anderson and Belnap 1975:292], где матрица для нее обозначается посредством M_3 . Таким образом, связки, определяемые в M_3 , есть в точности связки трехзначной логики Клини K_3 , расширенной связкой \supset_s .

В [Anderson and Belnap 1975: 470], где подробно исследуется логика следования **E**, релевантная логика **R**, и система **RM** (об этих логиках см. ниже в разделе 8.5), вводится логика **RM3**, аксиоматика которой есть расширение логики следования **E**. Здесь показано, что связки **RM3** есть в точности связки из M_3 , т.е. матрица M_3 является характеристической для **RM3**. В [Brady 1982] дана аксиомати-

³³ Истинностная таблица для этой импликации встречалась нам в разделе 2.3.

зация **RM3**, как расширение релевантной логики **R** (см. ниже раздел 8.5.3).

Наконец, А. Аврон [Avron 1986] определяет в **RM** новую связку \supset :

$$p \supset q =: q \vee (p \rightarrow q).$$

Теперь в языке $\sim, \supset, \vee, \wedge$ формулируется система **RM²**, которая эквивалентна **RM**. Добавление к **RM²** аксиомы

$$\sim(p \supset q) \supset p$$

приводит к системе **RM₃²**, которая есть не что иное, как **PCont**. В этой работе, в предисловии, А. Аврон указывает, что эта система функционально эквивалентна **RM3**. Однако только в [Avron 1991] мы находим доказательство эквивалентности:

$$p \supset_I q =: q \vee (p \supset_s q)$$

$$p \supset_s q =: (p \supset_I q) \wedge (\sim q \supset_I \sim p)^{34}.$$

Здесь же приводится секвенциальное исчисление для **RM3**.

Обратим внимание на то, что в основе обеих логик **PCont** и **RM3** лежит сильная регулярная логика Клини **K₃** с разными связками импликации, но которые приводят к одной и той же логике по функциональным свойствам. Однако в качестве основания вместо **K₃** можно рассмотреть логики **K₃^W** и **K₃[→]**. Как раз в [Halkowska 1989] исследуются алгебраические свойства трехзначной логики бессмысленности **Z**, которую можно представить как расширение **K₃^W** посредством добавления дизъюнкции Эббингауза \vee^E . Это аналогично тому, что к **K₃^W** добавить импликацию Собочиньского \supset_s , (см. выше раздел 3.3.3). Заметим, что в силу определения $p \supset_s q$ А.А. Солощенковым система **Z** функционально вложима в **K₃^W + $p \supset_I q$** . Развитие этой темы см. в самом конце этой главы, где будет представлена оригинальная решетка импликативных расширений логики **K₃^W** (см. [Томова 2010]).

3.5.2.2. Решетка паралогик

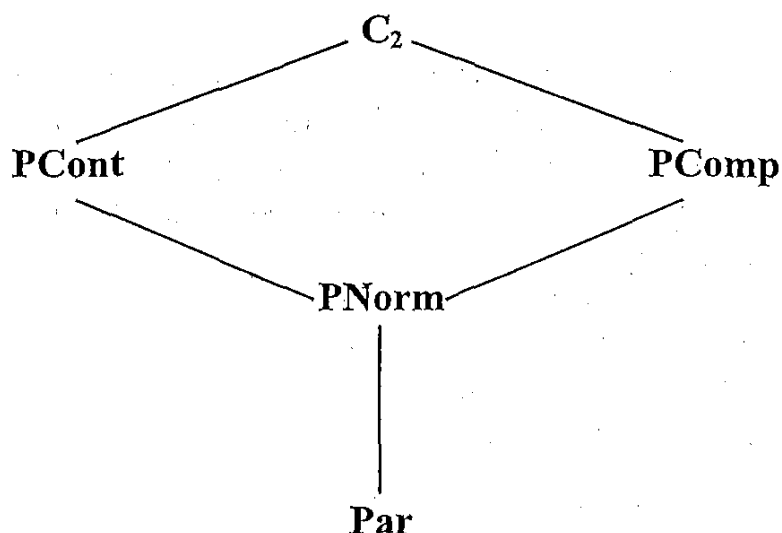
В указанной работе [Avron 1991] вводится важное понятие *базисной логики*: это весь позитивный фрагмент классической логики **C₂**, плюс законы де Моргана и аксиомы $\sim\sim p \approx p$, $\sim(p \supset q) \approx p \wedge \sim q$. Впервые аксиоматизация этой логики появилась в [Попов 1989], где она обозначена посредством **Par** (см. ниже раздел 5.4.4.3). Если теперь добавить $p \vee \sim p$, то получим в точности аксиоматизацию

³⁴ Оказывается $p \supset_s q$ можно определить только посредством связок \sim и \supset_I :

$p \supset_s q =: \sim(p \supset_I q) \supset_I \sim(q \supset_I p)$ (А.А. Солощенков, 2009 г.).

PCont, предложенную Батенсом–Розоноэром (см. выше). Если же добавить $p \supset (\sim p \supset q)$, то получим аксиоматизацию трехзначной логики с импликацией \rightarrow_1 (см. выше раздел 3.1.1), которая функционально эквивалентна логике Лукасевича \mathbf{L}_3 .³⁵ Если же добавим одновременно обе эти формулы, продолжает А. Аврон, то получим аксиоматизацию классической логики \mathbf{C}_2 . Из [Попов 2009] следует, что **Par** является одновременно паранепротиворечивой и параполной логикой. Здесь показано, что **Par** можно расширить законом Клини $(p \wedge \neg p) \supset (q \vee \neg q)$. Эту логику обозначим посредством **PNorm**³⁶, которая также является одновременно паранепротиворечивой и параполной. В [Знаменская и Попов 2009] показано, что $\mathbf{PNorm} = \mathbf{PCont} \cap \mathbf{PComp}$. Понятно, что если добавить к **PNorm** $p \vee \sim p$, то получим **PCont**, если же добавить $p \supset (\sim p \supset q)$, то получим **PComp**. Все эти логики, кроме \mathbf{C}_2 , назовем *паралогики*.

Тогда решетка Попова выглядит следующим образом:



Более того, других логик между **Par** и \mathbf{C}_2 нет [Попов 2009] (!)

3.5.3. Логика \mathbf{J}_3

Еще одна весьма известная паранепротиворечивая логика была предложена в [D'Ottaviano and da Costa 1970] со следующими связками: \vee , \sim и \diamond и обозначена как \mathbf{J}_3 . Как уже известно, логика с та-

³⁵ По предложению В.М. Попова эту логику обозначим посредством **PComp**, поскольку эта логика в данной формулировке является дуальной к **PCont** и поэтому называется *параполной*. О понятии параполноты см. в разделе 3.5.4.1.

³⁶ В [Попов 2009] эта логика обозначается посредством **PContPComp**. В дипломной работе Н.А. Знаменской (2010 г.) показано, что характеристической матрицей для этой логики является девятизначная матрица, полученная посредством умножения матрицы для **PCont** на матрицу для **PComp**.

кими связками функционально эквивалентна логике Лукасевича \mathbf{L}_3 , т.е. в ней выражима импликация Лукасевича \rightarrow (см. 3.1.2). Но \mathbf{J}_3 , в отличие от \mathbf{L}_3 , берется с двумя выделенными значениями. Подобная логика была нами обозначена как \mathbf{L}_3^2 (см. 3.4.1). Поэтому, например, в \mathbf{J}_3 формула $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$ тавтология, а в \mathbf{L}_3 нет.

\mathbf{J}_3 совпадает с системой \mathbf{CLuNs} (см. [Batens 1989]) и с системой $\mathbf{LFI1}$ (см. Carnielli, Marcos and de Amo 2000) и, самое удивительное, совпадает с системой Φ_v , введенной гораздо ранее в [Schütte 1960].

В дальнейшем в качестве исходной связки к \mathbf{J}_3 добавляется связка \supset_J . Заметим, что $p \supset_J q =: \sim \Diamond p \vee q$. Напомним, что логика со связками \sim, \vee есть \mathbf{K}_3 , логика со связками \sim, \vee, \supset_J есть \mathbf{PCont} . Таким образом, логика \mathbf{J}_3 есть расширение \mathbf{PCont} посредством добавления связки \Diamond или, по-другому, логика \mathbf{J}_3 есть расширение \mathbf{PCont} посредством добавления константы 1 (или 0). Предикатную формулировку \mathbf{J}_3 (и теорию моделей) можно найти в [D'Ottaviano 1985; 1987].

Обратим внимание на работу [D'Ottaviano and Epstein 1988] (см. также [Epstein 1990, ch. IX]), где приводится аксиоматизация \mathbf{J}_3 как расширение классической логики \mathbf{C}_2 . В качестве исходных связок взяты \neg, \supset_J, \wedge и \sim , где \neg есть отрицание Гейтинга (см. 3.2). Поскольку $\Diamond p =: \neg(p \supset_J (p \wedge \neg p))$, то исходная система связок \mathbf{J}_3 D-эквивалентна связкам из \mathbf{L}_3 . Заметим, что посредством связок \neg, \supset_J и \wedge верифицируется \mathbf{C}_2 . В \mathbf{L}_3 выражима связка Холдена $\sim\downarrow$ (см. 3.3.1.1), которую мы обозначили посредством Δ . Тогда аксиоматизация \mathbf{J}_3 выглядит следующим образом.

0. Аксиоматизация \mathbf{C}_2 в языке \neg, \supset, \wedge

$$1. (\sim p \wedge \Delta p) \leftrightarrow \neg p$$

$$2. \sim\sim p \leftrightarrow p$$

$$3. \Delta(\neg p)$$

$$4. [(p \wedge q) \wedge \Delta(p \wedge q)] \leftrightarrow [(p \wedge \Delta p) \wedge (q \wedge \Delta q)]$$

$$5. (\sim p \wedge \Delta p) \supset_J \Delta(p \supset_J q)$$

$$6. (q \wedge \Delta q) \supset_J \Delta(p \supset_J q),$$

где $p \leftrightarrow q =: (p \supset_J q) \wedge (q \supset_J p)$.

Правила вывода: МР и подстановка.

Заметим, что здесь, как и во всех паранепротиворечивых логиках, правило эквивалентной замены (см. выше: если $\vdash A \leftrightarrow B$, то $\vdash C(A) \leftrightarrow C(B)$) не имеет места и в силу этого для таких логик нельзя построить алгебру Линденбаума (см. раздел 8.6.3.1). На-

пример, в J_3 : $\models (p \leftrightarrow p) \leftrightarrow (q \leftrightarrow q)$, но $\not\models \sim(p \leftrightarrow p) \leftrightarrow \sim(q \leftrightarrow q)$, если p принимает значение 1, а q значение $1/2$.

3.5.4. Логики P^1 и P^2

Кроме требования Яськовского о неверифицируемости в паранепротиворечивой логике закона Дунса Скота существует еще дополнительное требование да Косты о неверифицируемости закона непротиворечия в виде $\neg(p \wedge \neg p)$ [da Costa 1974]. Следующие две логики как раз с таким свойством.

А. Сетте [Sette 1973] строит логическое исчисление P^1 , которое получается из классического пропозиционального исчисления C_2 в формулировке С.К. Клини посредством замены аксиомы (9)

$$(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$$

на аксиому

$$(\neg p \supset \neg q) \supset ((\neg p \supset \neg\neg q) \supset p).$$

Эта логика оказалась трехзначной с двумя выделенными значениями, а связки \supset и \neg есть не что иное, как \supset^\diamond и \sim^\square (см. выше раздел 3.3.1.1).

Сетте показал, что логические связки \wedge , \vee и \equiv в P^1 выразимы посредством \neg и \supset :

$$p \wedge q =: (((p \supset p) \supset p) \supset \neg((q \supset q) \supset q)) \supset \neg(p \supset \neg q)$$

$$p \vee q =: (p \supset \neg\neg p) \supset (\neg p \supset q)$$

$$p \equiv q =: (p \supset q) \wedge (q \supset p),$$

где, заметим, \wedge и \vee не есть, соответственно, \min и \max .

Впервые истинностные таблицы для таких логических связок появились в [da Costa 1963], где использовались для опровержения некоторых тавтологий C_2 , которые не имеют места в паранепротиворечивой логике да Косты C_1 (см. ниже раздел 8.6.2). Эти же истинностные таблицы появились в [da Costa and Alves 1981], где соответствующая логика была обозначена посредством F ; она же независимым образом была обнаружена С. Мортенсеном в 1979 г., который обозначил ее посредством $C_{0,1}$ (см. [Mortensen 1989: 299]).

Имеются различные аксиоматизации P^1 с исходными связками \neg и \supset . Наиболее простой является следующая [Sette and Alves, 1996]:

$$1. p \supset (q \supset p)$$

$$2. (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$$

$$3. (\neg p \supset \neg q) \supset ((\neg p \supset \neg\neg q) \supset p) .$$

$$4. (p \supset q) \supset \neg\neg(p \supset q).$$

Правила вывода: МР и подстановка³⁷.

Добавим также, что в [Porov 1998] появляется аксиоматизация P^1 под названием I_1 , которая получается из трехзначной паранепротиворечивой логики $V1$ (см. [Arruda 1977]), если в ней останутся только так называемые “переменные Васильева”.

Отметим некоторые свойства P^1 : 1) Исчисление P^1 как и $PCont$ является *максимальным* [Sette 1973]; 2) Хотя логика P^1 является паранепротиворечивой, т.е. закон Дунса Скота здесь не имеет места, но верифицируется формула Лукасевича

$$p \supset (\neg p \supset (\neg\neg p \supset q))^{38};$$

3) Пусть T есть теория. Если $T \models A$ и $T \models \neg A$, тогда формула A должна быть атомарной формулой. Другими словами, противоречивость появляется в теориях, основанные на P^1 , только на атомарном уровне³⁹; 4) Матричная логика P^1 является комбинацией двух трехзначных изоморфов C_2 , содержащихся в B_3 (см. последний абзац в 3.5.4.1).

Наконец, отметим, что логики P^1 и $PCont$ по функциональным свойствам существенно различны: как мы показали, логические связи P^1 выразимы в B_3 , а связи $PCont$ выразимы в L_3 (см. [Kotas and da Costa 1978]).

Интересно, что B_3 содержит еще одну паранепротиворечивую логику со связками \supset^\diamond , \wedge^\diamond , \vee^\diamond , и \equiv^\diamond , как в P^1 , и с отрицанием \sim . Такая логика с одним выделенным значением впервые была рассмотрена Мортенсенсом под названием $C_{0,2}$ [Mortensen 1989: 301]. Поскольку правило МР здесь не сохраняет тавтологию, то в [Marcos 2005] эта логика рассматривается с двумя выделенными значениями, как и P^1 . При этом приводится аксиоматизация новой логики опять же как расширение C_n и обозначается она как P^2 . Заметим, что $\sim^\square p$ можно определить в P^2 как $p \supset^\diamond \sim p$. Здесь также доказывается, что P^2 , как и P^1 , является *максимальной* логикой и приводится их предикатная формулировка.

³⁷ В [Marcos 2005] приведена аксиоматизация P^1 как расширение аксиоматизации последовательности бесконечнозначных паранепротиворечивых логик да Косты C_n (см. ниже гл. 8.6.1).

³⁸ Другие матричные паранепротиворечивые логики с таким свойством приведены в [Karpenko 2000b].

³⁹ Об атомарных и молекулярных паранепротиворечивых логиках см. [Karpenko 2002].

3.5.4.1. Параполные логики \mathbf{I}^1 и \mathbf{I}^2 , дуальные к \mathbf{P}^1 и \mathbf{P}^2

В [Sette and Carnieli 1995] тщательно исследуется так называемая трехзначная *параполная* логика \mathbf{I}^1 , дуальная к \mathbf{P}^1 , и названная ими *слабой интуиционистской логикой*. Показано, что она является максимальной в указанном выше смысле. Понятие «параполноты» встречается уже в обзоре [Arruda 1980] (см. также [Loparić and da Costa 1984]) и является дуальным⁴⁰ к понятию «паранепротиворечивости». Полной теорией логики L называется такая теория T логики L , что для всякой формулы A : $A \in T$ или $\neg A \in T$. Параполной теорией логики L называется такая теория T логики L , что T не является полной теорией логики L и всякая полная теория логики L , включающая T , является тривиальной. Параполной логикой называется такая логика L , что существует параполная теория логики L .

Двухместные логические связки \mathbf{I}^1 суть не что иное, как внешние логические связки \supset^\square , \wedge^\square , \vee^\square , и \equiv^\square , а связка отрицание есть внешнее отрицание Бочвара \sim^\diamond . При этом берется одно выделенное значение. Посредством \supset^\square и \sim^\diamond выразимы остальные связки, поэтому они могут быть взяты в качестве исходных⁴¹.

В [Marcos 2005] приводится матричная параполная логика \mathbf{I}^2 , которая получается из \mathbf{I}^1 посредством замены отрицания \sim^\diamond на \sim . Эта логика является параполной и максимальной⁴². Однако заметим, что эта логика впервые была открыта В.М. Поповым [Попов 2002] под названием **LAP**. Здесь же она представлена в виде изящного гильбертовского и секвенциального исчисления.

Обратим внимание на весьма интересный факт, что логики \mathbf{P}^1 и \mathbf{I}^1 являются *комбинацией* двух изоморфов (\mathbf{B}_3^\square и \mathbf{B}_3^\diamond) классической логики \mathbf{C}_2 , содержащихся в \mathbf{B}_3 (см. 3.3.1.1). В первом случае берутся двухместные связки из \mathbf{B}_3^\diamond и отрицание из \mathbf{B}_3^\square ; во втором случае берутся двухместные связки из \mathbf{B}_3^\square и отрицание из \mathbf{B}_3^\diamond . Впервые на это обращено внимание в [Karpenko 2000a].

3.6. Штрих Шеффера для некоторых трехзначных логик

Вопрос о штрихе Шеффера еще раз показывает, насколько трехзначный случай существенно отличается от двузначного.

⁴⁰ О дуальности интуиционистских и паранепротиворечивых логик см. ниже в разделе 8.7.4.

⁴¹ Заметим, что в [Loparić and da Costa 1986] логики \mathbf{P}^1 и \mathbf{I}^1 обнаружены независимым образом и в [Sette and Alves 1996] доказано, что исчисления из [Loparić and da Costa 1986] и [Sette and Carnieli 1995] эквивалентны.

⁴² В этой работе отмечается, что существует огромное число трехзначных *максимальных* паранепротиворечивых и параполных логик.

В [Шестаков 1964] по аналогии со стрелкой Пирса для S_2 строится стрелка Пирса (антидизъюнкция) для K_3 :

$$p \uparrow q =: \sim p \wedge \sim q. \text{ Тогда } \sim p =: p \uparrow p, p \vee q = \sim(p \uparrow q).$$

Здесь показывается, что все *сильные* и все *слабые* в смысле Клини связки могут быть определены через $p|q$.

Для L_3 штрих Шеффера строится несколько сложнее и мы можем извлечь его из работы Дж. Мак-Кинси [McKinsey 1936], где строится штрих Шеффера для L_n :

\rightarrow^E	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	1	1

Таким образом, посредством $p \rightarrow^E q$ можно определить связки $\sim p$ и $p \rightarrow q$, и наоборот, посредством $\sim p$ и $p \rightarrow q$ определяется $p \rightarrow^E q$. При этом заметим, что, как и в предыдущих случаях, формула, определяющая $p \rightarrow^E q$, содержит не более двух различных переменных.

Другая ситуация имеет место для G_3 . Оказывается, что формулы, определяющей штрих Шеффера для G_3 и содержащей не более двух различных переменных, не существует (см. [Кузнецов 1965]). Им же здесь представлено определение штриха Шеффера для G_3 , которое несколько упрощено в [Раца 1969: 205]:

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge (q \Rightarrow r)).$$

Совсем удивительная ситуация возникает для B_3 . В [Шестаков 1959] исходные связки для B_3 были сведены к двум: $\Box p$ и $p|q$, где последняя есть штрих Шеффера (антиконъюнкция) для множества внутренних связок B_3 . Это множество обозначим посредством B_0 . В [Шестаков 1971] вводится штрих Шеффера γ

γ	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	0	1	1

(а также стрелка Пирса) для внешних связок V_3 . Это множество обозначим посредством V_1 . Здесь подробно изучается логика V_1 , строятся ее различные нормальные формы и доказывается функциональная полнота. В этой работе В.И. Шестаков заключает, что множество всех связок V_3 есть объединение двух непересекающихся множеств V_0 и V_1 . Отсюда следует, что для логики V_3 штриха Шеффера не существует.

Проблема штриха Шеффера для различных n -значных логик будет рассмотрена в гл. 7.

3.7. Некоторые применения

Характерным примером применения трехзначной логики является ситуация, когда рассматриваются высказывания, в которых термины не имеют денотатов [Strawson 1950]. Приписывание таким высказываниям какого-то третьего истинностного значения указывает здесь не на то, что высказывание имеет промежуточное значение, а на то, что оно его вообще не имеет. Развитие такого подхода приводит к логикам с «истинностно-значными провалами» (truth-value gaps) [Fraassen 1966]⁴³. В этих логиках класс логических истин совпадает с классом тавтологий классической двузначной логики C_2 , в то время как принцип бивалентности отбрасывается. Эта семантика послужила инструментом для адекватной логической интерпретации аристотелевской проблемы будущей случайности [Fraassen 1966], [Seeskin 1971]. Таким образом, если у Лукасевича высказываниям, термины которых не имеют денотата (высказывания о будущих случайных событиях), приписывается промежуточное истинностное значение $1/2$, то в семантике Фраассена таким высказываниям вообще ничего не приписывается, но тем не менее закон исключенного третьего для таких высказываний имеет место. Такая семантика получила название семантики *супероценок*.

Другим интересным применением трехзначной логики была попытка решить определенные логико-философские проблемы квантовой механики. Первая работа в этой области принадлежит З. Завирскому [Zawirski 1934], видимо, оказавшему влияние на Г. Биркгофа и Дж. фон Неймана [Birkhoff and von Neumann 1936] при построении ими логики квантовой механики.

⁴³ Обсуждению вопроса «истинностно-значные провалы или третье истинностное значение?» посвящен последний раздел в статье [Hodes 1989].

Большое внимание привлекли к себе работы Г. Рейхенбаха [Reichenbach 1944; 1951]⁴⁴, где формулируется несколько трехзначных логик. Г. Рейхенбах, как и Я. Лукасевич, считает третье истинностное значение *промежуточным*, но приписывается оно высказываниям, описывающим неопределенные ситуации (например, высказывание, говорящее о положении частицы и ее импульсе, имеет истинностное значение *не определено*). Идея Г. Рейхенбаха о необходимости трехзначной логики для интерпретации квантовой механики была поддержана Х. Патнэмом [Putnam 1957].

В статье (1948 г.), а затем в книге П. Детуш-Феврие [Février 1951] был предложен набросок трехзначной логики $L_{c,3}$ под названием «логика дополнительности». Здесь формулируется «теорема» о том, что современная физика требует логику с более чем двумя истинностными значениями и логика дополнительности является адекватной для квантовой теории. Критическая рецензия Дж. МакКинси и П. Суппеса [McKinsey and Suppes 1954] интересна тем, что вообще затрагивает вопрос об отношении между логикой и физикой. Что касается упомянутой «теоремы», то ее аргументы не являются завершенными, а новая логика не представлена в виде формальной системы. Более того, пропозициональная логика должна быть расширена кванторами. Последний аргумент в качестве критического выдвигался А. Чёрчем [Church 1937] относительно недиистрибутивной логики Биркгофа и фон Неймана, а также К. Гемпелем [Hempel 1954] относительно трехзначной логики Рейхенбаха. Интересно, что в [Da Costa and Krause 2000x] логика $L_{c,3}$ была представлена строго в виде трехзначной логики и рассмотрена с двумя выделенными значениями как паранепротиворечивая логика $L_{c,3}^P$.

Сравнению трехзначных логических систем Г. Рейхенбаха и П. Детуш-Феврие посвящена статья Г. Тёрнебома [Törnebohm 1957]. Работы Рейхенбаха и Патнэма вызвали некоторую дискуссию, итог которой подведен Л. Хенкином [Henkin 1960]. После долгого перерыва, как бы возрождая интерес к данной тематике, появляется работа [Bigaj 2001], где для адекватного описания «квантовой реальности» используется семантика супероценок, т.е. принцип бивалентности отбрасывается, но сохраняются все законы классической логики.

⁴⁴ §§ 29-37 из книги 1944 г. переизданы в [Hooker (ed.), 1975: 53-97] под названием «Three-valued logic and the interpretation of quantum mechanics». О трехзначных логиках Рейхенбаха см. также у А. А. Зиновьева [Зиновьев 1960: 41-45]. Критическое рассмотрение подхода Г. Рейхенбаха содержится в книге В. С. Меськова [Меськов 1986: 32-39].

Наибольшее применение получила трехзначная логика Клини K_3 . В [Kripke 1975] она положена в основание новой теории истины, альтернативной к теории истины Тарского, а в книге [Maudlin 2004] конструкция, предложенная Крипке, применена для разрешения парадокса «Лжец». См. также [Skyrms 1970].

Логика Клини K_3 применена в Фиттингом качестве логики программирования *Prolog*. В [Fitting and Ben-Jacob 1988] приводится литература по применению K_3 в этой области, а также указывается, что логика *Pascal* есть слабая логика Клини K_3^w , а логика **LISP** есть промежуточная логика Клини K_3^{\rightarrow} . Применение трехзначной логики в программировании также рассмотрено в [Delahaye and Thibau 1991].

Обратим внимание на применение трехзначной логики в исследовании корректности вычислительных программ: [Rasiowa 1977], [Kirknerud 1982], [Naish 2006].

Наконец, стоит отметить оригинальную трехзначную логику Юрьева [Юрьев 2001], предназначенную для моделирования работы биологического нейрона. Свойства ее весьма необычны: никаких решеточных и квази-решеточных операций она не содержит (см. [Карпенко 2001b]).

3.8. Общие вопросы

Первой работой, где рассматриваются различные семейства трехзначных связок, выполняющие те или иные свойства, является статья [Dienes 1949]. Например, дизъюнкция и конъюнкция являются ассоциативными и выполняются законы дистрибутивности. Для связки импликации выполняются также различные импликативные законы, и т.д. Вопросы взаимоотношения, функциональной эквивалентности и аксиоматизации трехзначных систем не рассматриваются. Интересна статья [Maduch 1978], где выделяется класс чисто импликативных логик, состоящий из 18 различных систем, для них доказывается теорема дедукции и приводится их аксиоматизация. Здесь выполняется закон тождества $p \rightarrow p$ и выделенным значением является только 1.

Вопрос о взаимоотношении различных трехзначных логик впервые был рассмотрен В.И. Шестаковым [Шестаков 1964]. Кратко основной результат можно резюмировать так: если в B_3 конъюнкцию \cap заменим на конъюнкцию \wedge из K_3 , то в результате получим логику L_3 . Эту логику Шестаков назвал «логикой Бочвара–Клини». Намного более подробно вопросы взаимоотношения трехзначных логик и выразимости в них связок рассматриваются

В.К. Финном [Финн 1974а], где также приводится аксиоматизация и алгебраизация некоторых трехзначных логик.

В книге Л. Годдарда и Р. Раутли [Goddard and Routley 1973] вводится термин "логика значения" и рассматривается большое количество различных трехзначных логик. Основная идея состоит в том, что семантические значения высказываний в естественных языках зависят от контекста и поэтому некоторые многозначные логики могут служить в качестве полезной аппроксимации логической структуры естественного языка. Однако эта работа не содержит какого-либо формального определения «логики значения».

В [Финн, Анишаков, Григолия и Забейсайло 1980] и [Finn and Grigolia 1993] дается формальное определение понятия "логика значения" и его частного случая "логик бессмысленностного типа" на основе использования методов алгебраической семантики и введения понятия «тип истинностного значения». Здесь как бы реализуется идея Д.А. Бочвара о многозначных логиках как формализованных семантиках. В указанных работах приводится классификация трехзначных логик значения и логик бессмысленностного типа. В свою очередь логики бессмысленностного типа делятся на два основных подкласса: логики сильно бессмысленностного типа и логики слабо бессмысленностного типа. Получаем подкласс логик сильно бессмысленностного типа, если промежуточное значение понимается как «самая сильная» незначимость (бессмыслица). В системах первого подкласса появление хотя бы одного «сильно бессмысленного» высказывания в составе сложного делает все утверждение «сильно бессмысленным», в то время как «слабая бессмыслица» менее склонна к разрушению. Характерными представителями первого подкласса как раз являются трехзначная логика Бочвара B_3 и трехзначная логика Холдена C . Наиболее интересным представителем второго класса является трехзначная логика Эббинхауза E_3 , которая по своим функциональным свойствам является промежуточной между B_3 и L_3 . Что касается самой L_3 , то в предложенной классификации она вообще не является логикой значения и называется логикой неопределенностного типа.

Интересна работа А. Аврона [Avron 1991а], где выделяется класс трехзначных логик, названных *естественными*. Это следующие логики: K_3 , L_3 , LPF , RM_3 и $PCont$. Пояснения требует логика LPF , которая была развита в рамках *VDM* проекта [Barringer, Cheng and Jones 1984]. LPF есть расширение K_3 посредством добавления связки Δ , которая, напомним, есть не что иное, как связка Холдена $\sim\downarrow$ (см. 3.3.3). Аврон показывает, что логики LPF и L_3

функционально эквивалентны. Однако заметим, что уже из работы [Шестаков 1964] следует, что подобное расширение K_3 есть L_3 (см. 3.1.2). Выше мы уже говорили, что RM_3 и $PCont$ эквивалентны (см. 3.5.2.1). Но, как говорит Аврон, имеет смысл рассматривать все эти логики по отдельности, поскольку каждая из них имеет свое специфическое отношение логического следования (в LPF в качестве импликации принимается $p \rightarrow_1 q$ (см. 3.1.1)). В этой статье этому вопросу уделено особое внимание. Кроме того, приводится секвенциальная формулировка этих систем со свойством устранимости сечения.

Таким образом, “естественными” логиками, по Аврону, являются только те, которые есть расширение K_3 , что, конечно, является довольно-таки сильным ограничением. Например, не попадает в этот класс такая известная трехзначная логика, как B_3 , поскольку она является расширением слабой регулярной логики Клини K_3^w . Вообще, интересно систематически рассмотреть расширения логики K_3^w и представить эти расширения в виде решетки. Этот вопрос будет рассмотрен в заключение всей главы.

В течение долгого времени считалось, что различные системы многозначной логики являются *альтернативными* к классической пропозициональной логике C_2 . Иногда для этого используется термин “*deviant*” (см., например, [Haack 1974]) и такие логики называются *девиантными* к C_2 . Основанием для этого является то, что некоторые тавтологии C_2 опровергаются в той или иной трехзначной логике: закон сокращения в L_3 , контрапозиция в B_3 , закон Дунса Скота в RM_3 и т.д. Но оказалось, что некоторые трехзначные логики можно аксиоматизировать как расширение C_2 . Выше мы уже ссылались на B_3 и на J_3 (напомним, что последняя по своим выразительным свойствам есть L_3). При таком подходе эти логики не являются девиантными к C_2 . В работе [Sinnott-Armstrong and Malhotra 2002] обсуждается проблема девиантности и в не совсем ясном виде вводится класс трехзначных *нормальных* логик, которые есть расширение C_2 . Подобный метод аксиоматизации, но на совершенно другом уровне (метод Аншакова–Рычкова), будет обстоятельно рассмотрен нами в разделе 6.3

Наконец, теория моделей для трехзначных логик рассмотрена в [Hodes 1989].

3.9. Решетка импликативных расширений регулярных логик Клини

Мы знаем, что $PCont$ является расширением K_3 (сильная логика Клини), а B_3 является расширением K_3^w (слабая логика Клини). Ло-

гика \mathbf{L}_3 является расширением как \mathbf{PCont} , так и \mathbf{V}_3 . В свою очередь, \mathbf{K}_3 является расширением \mathbf{K}_3^w . Возникает нетривиальный вопрос о суммировании всех *интересных* расширений \mathbf{K}_3^w и представлении их в виде решетки [Томова 2010].

Надо уточнить слово «интересные». Для каждой системы логики наиболее важно, какими свойствами обладает её связка импликации. Пусть V_3 есть $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ и D есть множество выделенных значений. Импликацию \rightarrow будем называть *естественной*, если она обладает следующими свойствами:

- (1) *С-расширение*, т.е. ограничение \rightarrow на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_3 суть обычная классическая связка импликации.
- (2) *Нормальность*: *modus ponens* согласуется с табличным определением связки \rightarrow .
- (3) *Согласованность с частичным порядком* на V_3 : если $x \leq y$, то $x \rightarrow y \in D$.
- (4) $x \rightarrow y \in V_3$, в остальных случаях.

При $D = \{1\}$ имеем всего 6 импликаций:

\rightarrow	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	a	0
$\frac{1}{2}$	1	1	b
0	1	1	1

Здесь $a \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

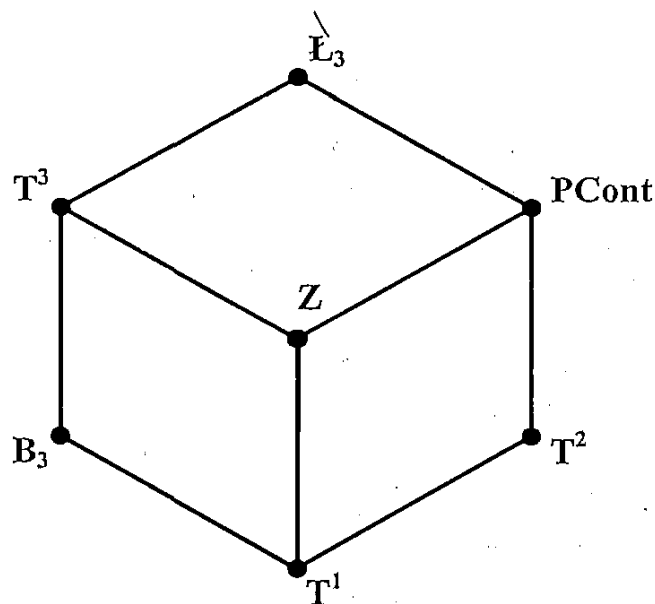
При $D = \{1, \frac{1}{2}\}$ имеем 24 импликации:

\rightarrow	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	b	0
$\frac{1}{2}$	a	a	0
0	1	a	1

Здесь $a \in \{1, \frac{1}{2}\}$ и $b \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Примечание 1. Две пары импликаций совпадают как при $D = \{1\}$, так и при $D = \{1, \frac{1}{2}\}$, поэтому имеется всего 28 уникальных импликаций, удовлетворяющих условиям (1) – (4).

Тогда решетка расширений логики Клини K_3^w импликациями состоит всего из семи логик:



Пусть

\rightarrow_{23}	1	$\frac{1}{2}$	0
1^*	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}^*$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

\rightarrow_{24}	1	$\frac{1}{2}$	0
1^*	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}^*$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

\rightarrow_{13}	1	$\frac{1}{2}$	0
1^*	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}^*$	1	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1

Тогда

$$T^1 = K_3^w + \rightarrow_{23}$$

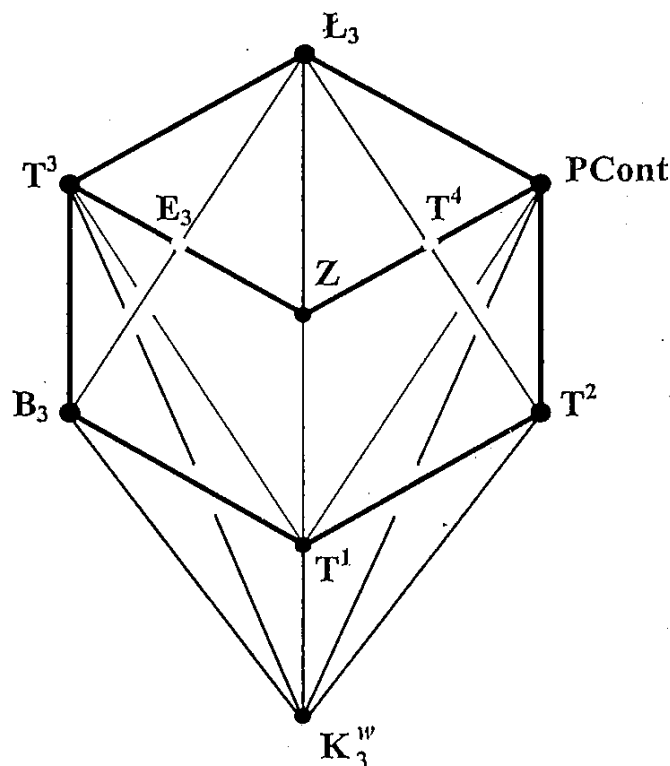
$$T^2 = K_3^w + \rightarrow_{24}$$

$$T^3 = K_3^w + \rightarrow_{13}$$

Напомним, $Z = K_3^w + \rightarrow_s$. Логика T^1 , T^2 и T^3 появляются впервые и это можно объяснить только тем, что они являются некоммутативными, если мы обычным образом определим в них дизъюнкцию. Таким образом, некоммутативность является фундаментальным свойством трехзначных логик. Заметим, что в последнее время некоммутативным логикам уделяется все большее внимание.

Самое примечательное то, что для всех этих семи логик имеется импликация, удовлетворяющая стандартной теореме дедукции.

Примечание 3. Логика Эббингауза E_3 также не попадает в эту классификацию, поскольку содержит сразу две импликации (внешнюю импликацию Бочвара и импликацию Собочиньского) и заменить их на одну импликацию нельзя, т.е. E_3 не является имплекативным расширением K_3^w . Это хорошо видно на следующей диаграмме:



Интересно, что у E_3 имеется некоммутативный напарник T^4 (точно так же как у B_3 имеется T^2 , а у $PCont$ имеется T^3): $T^4 = T^2 + \rightarrow_s$.

Интересна также таблица разбиений всех 28 импликаций на классы:

L_3	$PCont$	B_3	Z	T^1	T^2	T^3
12	8	3	2	1	1	1

Стоит подчеркнуть, что в каждом из этих классов имеется импликация, которая позволяет сформулировать стандартную теорему дедукции (см. выше раздел 1.4).

Более детально обо всем этом см. в [Томова 2010].

Остается проделать аналогичную работу для расширений p -логик (см. выше).

4. ЛОГИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И РЕШЕТКИ

4.1. Понятие логической матрицы

Понятие логической матрицы как обобщение интуитивного понятия истинностных таблиц появилось в начале 20-х годов прошлого века (Ч.С. Пирс, Я. Лукасевич, П. Бернайс, Э. Пост и др.). Но строго, понятие многозначной логической матрицы для фиксированного пропозиционального языка \mathcal{L} введено Я. Лукасевичем и А. Тарским в давно ставшей классической работе [Łukasiewicz and Tarski 1930], подводящей итог исследований Львовско-Варшавской школы в области многозначной логики.

Логическая матрица представляет собой систему $\mathfrak{M} = \langle V, O, D \rangle$, состоящую из трех множеств, где V есть непустое множество истинностных значений, элементы которого обозначаются x, y, z с индексами или без них; O — множество матричных операций, определенных на множестве V , и D называется множеством выделенных значений такое, что D является собственным подмножеством V , т.е. $D \subset V$, $0 \in V$, но $0 \notin D$.¹

Первоначально логические матрицы использовались как простейшие семантические модели для определения класса теорем в специфических логических исчислениях.

Примеры логических матриц:

1) $\mathfrak{M}_2^C = \langle \{1, 0\}, \neg_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}, \{1\} \rangle$ называется двузначной логической матрицей для пропозициональной классической логики C_2 , где матричные операции $\neg_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \wedge_{\mathfrak{M}}$ определяются таблично точно так же, как и логические связки $\neg, \supset, \vee, \wedge$ (см. выше раздел 1.1).

¹ В последнее время стало важным определять в матрице наравне с множеством выделенных значений D^+ также множество *антивыделенных* значений D^- , которое не обязательно является дополнением первого (впервые см. в [Rescher 1969]). Это оказалось весьма полезным инструментом, расширяющим возможности самой логики и утверждающим особый статус многозначной логики. В [Malinowski 1990] вводится понятие n -значной q -матрицы, где D^+ и D^- непересекающиеся собственные подмножества V . Более того, $D^+ \cap D^-$ может быть не пусто. Эти случаи используются для определения отношения логического следования, которое нельзя получить средствами классической логики (см. [Shramko and Wansing 2007]).

2) $\mathfrak{M}_3^L = \langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \sim_{\mathfrak{M}}, \rightarrow_{\mathfrak{M}}, \{1\} \rangle$ называется трехзначной логической матрицей для пропозициональной логики Лукасевича \mathcal{L}_3 , где матричные операции $\sim_{\mathfrak{M}}, \rightarrow_{\mathfrak{M}}$ определяются таблично точно так же, как логические связки \sim, \rightarrow (см. 2.1).

В обоих случаях под многозначной логикой понимался класс тавтологий в соответствующем пропозициональном языке.

4.2. Основные свойства логических матриц

В общем случае для определения класса тавтологий, логического следования, семантического определения логической системы, модели и т.д. окажется весьма полезным понятие *оценки* формулы в логической матрице. Неявным образом мы этим понятием пользовались, когда говорили о формулах, принимающих то или иное истинностное значение.

Пусть Fm есть множество формул, образованных из соответствующего пропозиционального языка \mathcal{L} .

Оценкой на матрице \mathfrak{M} является отображение v из множества пропозициональных переменных в множество истинностных значений V . Тогда истинностное значение $v(A)$ формулы A из Fm определяется индуктивно (с шагами, которые использовались при построении формулы):

1) если A есть пропозициональная переменная, то $v(A) \in V$;

2) если A и B есть формулы, то

$v(\dagger A) = \dagger v(A)$, если \dagger есть унарная связка;

$v(A \otimes B) = v(A) \otimes v(B)$, если \otimes есть двухместная связка².

Обратим внимание, что здесь в левые части равенств входят пропозициональные связки, а в правые — символы операций из матрицы \mathfrak{M} , но для удобства будем использовать для них одинаковые обозначения.

Будем говорить, что формула A является *тавтологией* в матрице \mathfrak{M} , если $v(A) \in D$ для любой оценки v на матрице \mathfrak{M} . Множество всех тавтологий обозначается посредством $E(\mathfrak{M})$.

Под *правилом* над множеством Fm обычно понимается отношение $r \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$, где $\mathcal{P}(Fm)$ есть множество всех подмножеств Fm и \times есть операция декартова произведения; при этом, естественно, правила должны сохранять тавтологию, т.е. примененные к тавтологиям снова дают тавтологии.

² Понятно, что оценка распространяется на формулы, построенные из любых n -местных связок, но мы, как и в классическом случае, ограничимся лишь одноместными и двухместными связками.

Предположим, что \mathcal{R} есть некоторое множество правил над Fm и пусть $X \subseteq Fm$. Тогда каждая такая пара $\langle X, \mathcal{R} \rangle$ называется *пропозициональным исчислением* \mathbf{L} над Fm . Говорят, что матрица \mathcal{M} *адекватна* для исчисления (X, \mathcal{R}) , если применение всех правил из \mathcal{R} к X равно $E(\mathcal{M})$.

Особый интерес представляют исчисления $\mathbf{L} = \langle X, \mathcal{R} \rangle$, где \mathcal{R} есть множество правил, которое содержит по крайней мере два правила: *modus ponens* (MP) и *подстановку*. Понятие доказательства формулы A из посылок Γ ($\Gamma \vdash A$) определяется для всех рассматриваемых в книге исчислений стандартно (см. 1.4).

Пара $\mathbf{L} = \langle X, \mathcal{R} \rangle$ полностью определяет множество доказуемых в \mathbf{L} формул. Исчисления рассматриваемого вида принято называть исчислениями *гильбертовского типа*, а множество X — множеством *аксиом* исчисления $\mathbf{L} = \langle X, \mathcal{R} \rangle$. Часто рассматриваются исчисления $\mathbf{L} = \langle X, \mathcal{R} \rangle$ с пустым множеством аксиом X , имеющих то же множество теорем, что и исчисление $\mathbf{L}' = \langle X', \mathcal{R}' \rangle$ с непустым X' и такими \mathcal{R}' , что \mathcal{R} отличается от \mathcal{R}' только наличием 0-посылочных правил вывода, обеспечивающих доказуемость всех подстановочных частных случаев формул из X' . Таким образом, каждая «аксиома» представляет бесконечное множество аксиом и тогда правило подстановки оказывается излишним. Исчисления такого типа называются исчислениями со *схемами аксиом*. В дальнейшем, если не оговорено другое, под пропозициональным исчислением \mathbf{L} будем понимать гильбертовское исчисление $\mathbf{L} = \langle X, \mathcal{R} \rangle$ или, в более общем виде, $\mathbf{L} = \langle Fm, \vdash \rangle$, где отношение выводимости \vdash для \mathbf{L} есть бинарное отношение между множествами формул Fm и формулами Fm , т.е. $\vdash \subseteq \mathcal{P}(Fm) \times Fm$, удовлетворяющее следующим условиям Тарского для $X, Y \subseteq Fm$ и $A \in Fm$:

- (1) если $A \in X$, тогда $X \vdash A$,
- (2) если $X \vdash A$ и $X \subseteq Y$, тогда $Y \vdash A$,
- (3) если $X \vdash B$ и $X, B \vdash A$, тогда $X \vdash A$.

Отношение \vdash называется *структурным*, если из $X \vdash A$ следует $e(X) \vdash e(A)$, где e есть подстановка в Fm .³ Логика с отношением \vdash , выполняющим эти условия, называется *логикой Тарского*.

³ В польской школе логиков получило распространение другое определение пропозициональной логики, введенное А. Тарским [Tarski 1930a; 1930b]. Пусть $\mathcal{P}(A)$ есть множество всех подмножеств множества A . *Оператором замыкания* на множестве A называются отображение $S: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, которое удовлетворяет следующим условиям для каждого $X, Y \subseteq A$ (см. [Кон 1968: 56]):

Проблема нахождения конечного множества аксиом по каждой конечнозначной логической матрице является весьма сложной и будет обсуждаться в главе 6.

Логические матрицы могут использоваться для того, чтобы определить понятие логики семантически. Пусть $\mathfrak{M} = \langle V, O, D \rangle$ есть логическая матрица и отношение логического следования на множестве Fm определяется следующим образом:

$\Gamma \models_{\mathfrak{M}} A$ т.т.т., когда для каждой оценки v на \mathfrak{M} из $v(A) \in D$ для всех $A \in \Gamma$ следует, что $v(B) \in D$.

При этом отношение логического следования является инвариантным относительно подстановки (или структурным). Отсюда пара $\langle Fm, \models_{\mathfrak{M}} \rangle$ есть логическая система.

- | | |
|--|--------------------|
| (C1) $X \subseteq C(X)$ | (рефлексивность), |
| (C2) $CC(X) = C(X)$ | (идемпотентность), |
| (C3) Если $X \subseteq Y$, то $C(X) \subseteq C(Y)$ | (монотонность). |

Подмножество X из A называется *замкнутым подмножеством*, если $C(X) = X$.

А. Тарский [Tarski 1930a] находит удивительное применение оператору замыкания для изучения абстрактного отношения следования. Вводится дополнительное условие: оператор C на множестве A называется *финитарным*, если

- (C4) $C(X) = \bigcup \{C(Y) : Y \subseteq X \text{ и } Y \text{ конечно}\}.$

Оператор замыкания с таким свойством в [Burris and Sankappanavar 1981: 19] называется *алгебраическим оператором замыкания*. Заметим, что (C4) влечет (C3). Теперь пусть A есть множество всех формул Fm в пропозициональном языке \mathcal{L} . Тогда оператор замыкания C называется *операцией присоединения следствий* (consequence operation) и обозначается посредством Cn , т.е. Cn есть операция, которая, примененная к множествам формул, позволяет получать новые множества формул. В терминологии Тарского $Cn(X)$ называется *дедуктивной системой* и представляет собой множество формул, дедуцируемых из формул X , взятых в качестве посылок, посредством аксиом и правил вывода.

Операция присоединения следствий Cn называется *структурной* (или *инвариантной относительно подстановки*), если для всех подстановок e (эндоморфизмов) пропозиционального языка \mathcal{L} выполняется условие

- (C5) $e(Cn(X)) \subseteq Cn(e(X)).$

Открытие того, что подстановки являются эндоморфизмами, и введение условия (C5) (см. [Łoś and Suszko, 1958]) было предназначено для того, чтобы выразить *формальный* характер логического следования.

Под *логикой* (пропозициональной) понимается пара $\langle Fm, Cn \rangle$, где операция присоединения следствий Cn не обязательно финитарная, но *структурная*. Изучению основных свойств операции присоединения следствий посвящена фундаментальная монография Р. Вуйцицкого [Wójcicki 1988]. Непосредственно в применении к многозначным логикам см. монографии [Zygmunt 1984] и [Malinowski 1993]. Связь между операцией Cn и обычным отношением выводимости \vdash очевидна:

$A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ тогда и только тогда, когда $B \in Cn(\{A_1, A_2, \dots, A_n\})$.

Пусть D и V' два непересекающихся множества в матрице \mathfrak{M} такие, что $D \cup V' = V$ и A и B произвольные формулы из Fm . Тогда логическая матрица называется *нормальной* (см. [Łukasiewicz and Tarski 1930]), если $v(A) \in D$ и $v(B) \in V'$ всегда влекут $v(A \supset B) \in V'$. Таким образом, нормальная логическая матрица согласуется с правилом МР, т.е. МР сохраняет тавтологию. Приведенные выше матрицы \mathfrak{M}_2^C и \mathfrak{M}_3^L являются нормальными, а матрица \mathfrak{M}_3^L с двумя выделенными значениями не является нормальной. Нормальные матрицы играют особую роль при доказательстве независимости аксиом (см. раздел 2.3 и Приложение).

Следующее свойство логических матриц является также весьма существенным. Назовем матрицы *С-расширяющими*, если ограничения операций $\neg, \supset, \vee, \wedge$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно. Таким образом, такие матрицы в качестве подматрицы содержат матрицу для C_2 , т.е., говоря неформально, на множестве $\{0, 1\}$ они содержат классическую логику. Все рассмотренные нами ранее трехзначные логики, кроме L_3 , являются *С-расширяющими*. В следующей главе мы рассмотрим самые известные не *С-расширяющие* логики (n -значные логики Поста).

Логическая матрица \mathfrak{M} называется *моделью* логики L , если каждая доказуемая формула в L является тавтологией в \mathfrak{M} . Если же верно и обратное, т.е. что каждая тавтология в \mathfrak{M} доказуема в L , то модель \mathfrak{M} называется *точной моделью* или, по-другому, \mathfrak{M} есть *характеристическая матрица* для L . Другими словами, \mathfrak{M} называется *характеристической матрицей* для L , если формула A является тавтологией в \mathfrak{M} т.т.т., когда A доказуема в L . Примерами характеристических матриц являются \mathfrak{M}_2^C для C_2 и \mathfrak{M}_3^L для L_3 . Пропозициональное исчисление может иметь характеристические матрицы различной мощности, где под мощностью матрицы понимается мощность множества V элементов матрицы. Поэтому, естественно, возникает нетривиальная проблема нахождения характеристической матрицы минимальной мощности для исчисления L .

Один из наиболее важных и общих результатов для логических матриц принадлежит А. Линденбауму (1930 г.): *каждая структурная логика $\langle Fm, \vdash \rangle$ имеет по крайней мере счетную (нормальную) матрицу \mathfrak{M} , адекватную для нее.*

Дальнейшее развитие теории логических матриц сделано в работах польских логиков [Łós 1949]⁴, [Łós and Suszko 1958] и [Wójcicki 1969; 1973]. Во второй из указанных работ найдены достаточные и необходимые условия для того, чтобы структурная логика $\langle Fm, \vdash \rangle$ имела единственную характеристическую матрицу. В работах Р. Вуйцицкого доказано, что каждая структурная логика $\langle Fm, \vdash \rangle$ строго полна относительно определенного класса матриц. Этот результат основывается на введении Вуйцицким понятия *обобщенной матрицы*, которое оказалось очень полезным для построения различных теоретико-модельных конструкций, играющих важную роль в обосновании новых семантических подходов в современной логике (см. об этом ниже в разделе 10.4).

Обобщенная матрица есть пара $\mathcal{A} = \langle A, C \rangle$, где A есть алгебра соответствующего типа и $C \subseteq \mathcal{P}(A)$ есть произвольное семейство подмножеств A . Обобщенные матрицы имеют хорошо известное дуальное представление как пара $\langle A, C \rangle$, где C есть оператор замыкания (см. выше примечание 3). Заметим, что в известной статье [Brown and Suszko 1973] вводится термин «абстрактная логика» $L = \langle A, C \rangle$, где A есть абстрактная алгебра, а C есть абстрактная операция присоединения следствий (без структурности). Обобщенные матрицы были также переоткрыты в [Dunn and Hardegree 2001] под названием «атласы» (atlases). Специально обобщенным матрицам, их применению и развитию посвящена статья [Font 2003].

В заключение введем понятие *матричной семантики*. Говорят, что класс \mathbf{M} логических матриц является матричной семантикой для логики L , если

$\Gamma \vdash A$ т.т.т., когда для каждой $\mathcal{M} \in \mathbf{M}$ и каждой оценки v на \mathcal{M} из $v[\Gamma] \subseteq D$ следует $v(A) \in D$.

Импликация слева направо говорит о том, что L корректна относительно \mathbf{M} , а импликация в другую сторону говорит о том, что L полна. Другими словами, \mathbf{M} является матричной семантикой для L , если каждая матрица в \mathbf{M} есть модель для L и, более того, для каждого Γ и A таких, что $\Gamma \not\vdash A$, имеется модель для L в \mathbf{M} , которая удовлетворяет этому условию, т.е. имеется оценка v на модели, которая приписывает формулам из Γ выделенные значения, а формуле A не выделенное значение.

В итоге мы имеем: *каждая логика (независимо от того, как она определена) имеет матричную семантику*. Этот результат говорит

⁴ Здесь впервые дано полное доказательство вышеупомянутого результата Линденбаума.

о преимуществе матричной семантики, т.е. матричная семантика является универсальной, что позволяет применять многие методы универсальной алгебры и теории моделей при семантическом исследовании *всех* пропозициональных логик.

Матричная семантика занимает важное место в современном процессе *алгебраизации* логики (см. [Jansana 2006]).

4.3. Операции над матрицами

Обратим внимание на то, что логическая матрица \mathfrak{M} представляет собой систему $\langle \mathcal{A}, D \rangle$, где \mathcal{A} – некоторая универсальная алгебра, а ее сигнатура образует множество матричных операций O^5 . Отсюда все теоретико-модельные операции, которые используются на алгебраических структурах, применимы и к логическим матрицам. Некоторые понятия окажутся нам полезными. Так, $\mathfrak{N} = \langle \mathcal{A}^*, D^* \rangle$ является *подматрицей* $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, если \mathcal{A}^* есть подалгебра \mathcal{A} (это значит, что операции из \mathcal{A} замкнуты на некотором подмножестве $V^* \subset V$) и $D^* = V^* \cap D$. Имеет место следующий важный факт: если $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, то $E(\mathfrak{M}) \subseteq E(\mathfrak{N})$.

Пусть J есть любое множество индексов. Для каждого $j \in J$ пусть $\mathfrak{M}_j = \langle \mathcal{A}_j, D_j \rangle$ есть определенная матрица для языка S . Мы можем образовать прямое произведение алгебры $\mathcal{A} = \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j$ и образовать произведение ее подмножества $D = \prod_{j \in J} D_j$. В результате матрица $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ называется *произведением матриц* \mathfrak{M}_j и обозначается посредством $\prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j$. Имеет место следующая теорема [Jaśkowski 1936]:

$$\text{Если } \mathfrak{M} = \prod_{j \in J} \mathfrak{M}_j, \text{ тогда } E(\mathfrak{M}) = \prod_{j \in J} E(\mathfrak{M}_j).$$

⁵ Здесь сделаем важное замечание относительно того, что сам пропозициональный язык \mathcal{L} порождает алгебру формул $\mathfrak{F} = \langle Fm, \neg, \supset, \vee, \wedge \rangle$. Тогда логической матрицей для \mathcal{L} является любая матрица $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{A}, D \rangle$ с алгеброй \mathcal{A} *подобной* алгебре \mathfrak{F} , т.е. операции обеих алгебр имеют одну и ту же арность. Это позволяет определить *оценку* языка \mathcal{L} в \mathfrak{M} , как гомоморфизм $h: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$. Тогда формула A истинна, если $h(A) \in D$, и A является тавтологией, если $h(A) \in D$ для каждого гомоморфизма h языка \mathcal{L} в \mathcal{A} .

Отсюда следует, что операция прямого произведения логических матриц *сохраняет* класс тавтологий исходной матрицы⁶.

4.3.1. Прямое произведение матрицы \mathfrak{M}_2^c на саму себя

Операция произведения логических матриц (впервые введена в [Wajsberg 1935]) нашла широкое применение при решении различных логических проблем. Специальное значение имеет прямое произведение матрицы \mathfrak{M}_2^c классической двузначной логики S_2 произвольное число раз на саму себя. Результирующая матрица окажется полезной при интерпретации многозначных логик в терминах классических истинностных значений 1 и 0 (см. гл. 9). Здесь же в качестве примера рассмотрим случай произведения $\mathfrak{M}_2^c \times \mathfrak{M}_2^c$, т. е. матрицу \mathfrak{M}_4^c .

Пусть $\mathfrak{M}_2^c = \langle \{1, 0\}, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{1\} \rangle$. Тогда результирующая матрица имеет вид:

$$\mathfrak{M}_4^c = \langle \{ \langle 11 \rangle, \langle 10 \rangle, \langle 01 \rangle, \langle 00 \rangle \}, \neg^+, \vee^+, \wedge^+, \supset^+, \{ \langle 11 \rangle \} \rangle.$$

Обозначим пары $\langle a_i, b_i \rangle$, где $a_i, b_i \in \{1, 0\}$, посредством $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Операции $\neg^+, \vee^+, \wedge^+, \supset^+$ на этих парах определяются *покомпонентно* (см. общий случай произведения матрицы \mathfrak{M}_2^c на саму себя в разделе 10.6).

Тогда табличное определение новых матричных операций выглядит следующим образом:

α	$\neg^+ \alpha$	\supset^+	11	10	01	00
11	00	11	11	10	01	00
10	01	10	11	11	01	01
01	10	01	11	10	11	10
00	11	11	11	11	11	11

⁶ Заметим, что в общем случае операция прямого произведения алгебр не сохраняет свойства исходной алгебры. Поэтому вводится понятие *подпрямого произведения* (см. [Burris and Sankaranarayanan 1981: 57]): алгебра \mathcal{A} является подпрямым произведением индексированного семейства $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ алгебр, если

$$(i) \mathcal{A} \leq \prod_{j \in J} \mathcal{A}_j \text{ и } (ii) \pi_j(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_j \text{ для всех } j \in J,$$

где π_j есть проективное отображение.

\vee^+	11	10	01	00
11	11	11	11	11
10	11	10	11	10
01	11	11	01	01
00	11	10	01	00

\wedge^+	11	10	01	00
11	11	10	01	00
10	10	10	00	00
01	01	00	01	00
00	00	00	00	00

Обозначим посредством 1, b , n и 0 последовательности $\langle 11 \rangle$, $\langle 10 \rangle$, $\langle 01 \rangle$, $\langle 00 \rangle$ соответственно, где 1 интерпретируется как «истина», 0 – «ложь», а b и n – промежуточные истинностные значения⁷. Тогда приведенные выше таблицы примут следующий вид:

x	$\neg^+ x$
1	0
b	n
n	b
0	1

\supset^+	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	1	n	n
n	1	b	1	b
0	1	1	1	1

\vee^+	1	b	n	0
1	1	1	1	1
b	1	b	1	b
n	1	1	n	n
0	1	b	n	0

\wedge^+	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	b	b	0	0
n	n	0	n	0
0	0	0	0	0

Обратим внимание, что здесь $b \vee n = 1$ и $b \wedge n = 0$, т.е. операции \vee и \wedge не являются *max* и *min* соответственно.

Именно таким образом была построена Я. Лукасевичем в 1953 г. четырехзначная логика S_4 , которая легла в основу его \mathcal{L} -модальной системы (подробно об этом см. ниже в разделе 5.4.2). Заметим, что последняя была построена им опять же для опровержения фаталистического аргумента Аристотеля.

Матрица $\mathcal{M}_4^c = \langle \{1, b, n, 0\}, \neg^+, \vee^+, \wedge^+, \supset^+, \{1\} \rangle$, как и матрица \mathcal{M}_2^c , является характеристической для S_2 . Это свойство, как следует из теоремы С. Яськовского, сохраняется для произвольного

⁷ У Лукасевича последовательности $\langle 10 \rangle$ и $\langle 01 \rangle$ обозначаются посредством 2 и 3. Содержательный смысл двух новых истинностных значений b и n может быть различным (см. ниже разделы 5.4.2 и 5.4.4).

числа умножений (конечного и бесконечного) матрицы \mathfrak{M}_2^c на саму себя. Отсюда следует, что классическую пропозициональную логику C_2 можно представить как конечнозначную с числом истинностных значений 2^n , так и бесконечнозначную с числом истинностных значений 2^{\aleph_0} , но она *единственная*, которая имеет характеристическую матрицу с множеством истинностных значений $\{0, 1\}$.

Метод умножения матриц служит способом получения новых логических матриц с большим числом истинностных значений. В [Rose 1952] подобным образом строится 8-значная система, предназначенная для применения к геометрии. Здесь в качестве истинностных значений выступают элементы множества $\{1, 0\}$ в третьей степени. Эти значения указывают на истинностный статус высказываний в трех системах геометрий: Евклида, Римана и Лобачевского.

Заметим также, что можно умножать различные матрицы друг на друга. Так, Е. Расёва [Rasiowa 1955] умножает истинностную двузначную таблицу для классической эквивалентности на трехзначную таблицу для импликации Лукасевича и дает аксиоматизацию вновь полученной шестизначной логики. Н. Решер [Rescher 1969: 99] в качестве примера рассматривает произведение $\mathfrak{M}_2^c \times \mathfrak{M}_3^L$. Он также рассматривает для общего случая вопрос о классе тавтологий результирующей матрицы.

4.3.2. Другие операции. Финитная аппроксимируемость

Кроме рассмотренного метода получения новых матриц, мощность которых есть произведение мощностей сомножителей, Яськовский [Jaśkowski 1936] вводит также операцию $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$, которая позволяет получать $n+1$ -значную матрицу на основе n -значной ($n \geq 2, n \in N$) таким образом, что для произвольной матрицы \mathfrak{M}_n , $E(\mathfrak{M}_n) \neq E(\mathfrak{M}_{n+1})$. Делается это следующим образом.

Пусть $\mathfrak{M}_n = \langle V_n, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{1\} \rangle$ есть некоторая исходная матрица, где $V_n = \{1, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 0\}$. Тогда матрица \mathfrak{M}_{n+1} с множеством значений V_{n+1} и с тем же самым выделенным элементом 1 определяется так:

$$\mathfrak{M}_{n+1} = \Gamma(\mathfrak{M}_n),$$

где Γ есть операция добавления нового элемента a^* к множеству V_n , причем матричные операции $\neg^*, \supset^*, \vee^*, \wedge^*$ в $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$ доопределяются по общей схеме посредством введенной ниже функции $\alpha(x)$, область определения которой есть V_n :

1) $\alpha(1) = a^*$ и $a^* \notin V_n$.

2) если $x \neq 1$, то $\alpha(x) = x$ для любого $x \in V_n$.

Операции в $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$ определяются следующим образом:

	\neg^*	\supset^*	1	$\alpha(y)$
1	$\alpha(\neg 1)$	1	$1 \supset 1$	$\alpha(1 \supset y)$
$\alpha(x)$	$\neg x$	$\alpha(x)$	$x \supset 1$	$x \supset y$

\vee^*	1	$\alpha(y)$	\wedge^*	1	$\alpha(y)$
1	$1 \vee 1$	$1 \vee y$	1	$1 \wedge 1$	$\alpha(1 \wedge y)$
$\alpha(x)$	$x \vee y$	$\alpha(x \vee y)$	$\alpha(x)$	$\alpha(x \wedge 1)$	$\alpha(x \wedge y)$

В качестве примера применим операцию Γ к матрице классической двузначной логики \mathfrak{M}_2^c , где $x = 1$ или 0, $y = 1$ или 0 и пусть $\alpha(1) = a^* = \frac{1}{2}$. Тогда $\Gamma(\mathfrak{M}_2^c)$ имеет вид:

	\neg^*	\supset^*	1	$\alpha(1)$	$\alpha(0)$	\supset^*	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	$\alpha(1 \supset 1)$	$\alpha(1 \supset 0)$	1	$1 \supset \frac{1}{2}$	$1 \supset 0$	$1 \supset 0$
$\alpha(1) = \frac{1}{2}$	0	$\alpha(1)$	$1 \supset 1$	$1 \supset 1$	$1 \supset 0$	$\frac{1}{2}$	$1 \supset \frac{1}{2}$	$1 \supset 0$	$1 \supset 0$
$\alpha(0) = 0$	1	$\alpha(0)$	$0 \supset 1$	$0 \supset 1$	$0 \supset 0$	0	$1 \supset \frac{1}{2}$	$1 \supset 0$	$1 \supset 0$

Аналогичным способом определяются операции \vee^* и \wedge^* . В результате мы получили не что иное, как характеристическую матрицу для трехзначной логики Гейтинга G_3 (см. 2.2). Эта матрица получила название «первой матрицы Яськовского». В зависимости от того, как определяется $\Gamma(\mathfrak{M}_n)$, можно получать различные логики. Например, Н. Решер [Rescher 1969: 95-96] вводит другую операцию, а именно $G(\mathfrak{M}_n)$ такую, что для произвольной матрицы \mathfrak{M}_n , $E(\mathfrak{M}_n) = E(\mathfrak{M}_{n+1})$.

Комбинируя метод умножения матриц и способ получения $n+1$ -значной матрицы на основе n -значной, С. Яськовский строит бесконечную последовательность J_i конечных матриц, определяемую так:

$$J_0 = \mathfrak{M}_2^c \text{ (классическая двузначная логика),}$$

$$J_{n+1} = \Gamma((J_n)^n),$$

где $(J_n)^n$ — декартова n -ая степень с основным множеством $(V_n)^n$.

В соответствии с определением матриц J_i их основные множества V_0, V_1, V_2, \dots состоят соответственно из элементов исходной матрицы \mathcal{M}_2^c , из упорядоченных пар этих элементов, из упорядоченных троек упорядоченных пар и т.д. Заметим, что матрицы Яськовского J_i имеют

$$(\dots (((2^1 + 1)^2 + 1)^3 + 1)^4 + 1)^5 \dots)^n + 1$$

элементов. В частности, J_0, J_1, J_2, J_3, J_4 имеют соответственно 2, 3, 10, 1001 и 1004006004002 элементов. Таким образом, число элементов в матрицах Яськовского растет исключительно быстро, но каждая из них конечна.

Рассмотренные операции над логическими матрицами были введены С. Яськовским для получения следующего результата: *бесконечная последовательность матриц Яськовского J_i является характеристической для интуиционистского пропозиционального исчисления **Int** (Об **Int** см. ниже в разделе 8.2.2)⁸*. Еще говорят, что последовательность матриц J_i *финитно аппроксимирует **Int***. Последнее означает, что для всякой формулы A , которая не выводима в **Int**, найдется в J_i матрица, на которой A не верна. Из свойства финитной аппроксимируемости следует важное свойство разрешимости исчисления. Роль разрешающего алгоритма играет параллельный перебор всевозможных выводов и всевозможных конечных матриц, чтобы найти вывод данной формулы в этом исчислении или ее опровергнуть. Однако не для всякого исчисления можно построить финитно аппроксимируемую модель или, по-другому, не всякое исчисление имеет *финитно-модельное свойство* (finite model property) [Harrop 1958].

Введем еще одно важное понятие, характеризующее логическое исчисление **L** в терминах истинностных таблиц. Исчисление **L'** называется *расширением* исчисления **L**, если каждая доказуемая формула **L** также доказуема в **L'**. Расширение **L'** называется *собственным расширением* исчисления **L**, если **L'** непротиворечиво, но содержит формулу не выводимую в **L**. Например, исчисление классической двузначной логики **C**₂ является собственным расширением исчисления **P**¹ и к тому же единственным (см. гл. 2). Исчисление **L** называется *предтабличным*, если все его собственные расширения табличны, т. е. являются конечнозначными логиками. Важные примеры предтабличных логик мы рассмотрим в гл. 8.

⁸ Подробное доказательство этой теоремы имеется в [Пильчак 1952] и [Rose 1953] и совсем обстоятельно в [Surma 1971]. Наконец, в [Kirk 1979] было показано, что бесконечное бинарное дерево является характеристическим для **Int**.

4.4. Понятие решетки. Основные свойства

Поскольку, как уже говорилось, логическая матрица \mathfrak{M} есть алгебра \mathcal{A} с множеством выделенных элементов D , то представляется возможным привлечь свойства *решеток* для характеристики многозначных логик. Эта характеристика окажется весьма полезной, поскольку открывает внутренний смысл того, что какая-то формула A не является общезначимой в данной матрице \mathfrak{M} , или того, что какая-то логическая связка одной логики не выражима посредством логических связок в другой логике. Но, главное, позволяет классифицировать логики относительно их решеточных свойств.

Имеются два стандартных (эквивалентных) определения понятия *решетки*. В первом случае выделяется специальный вид частично упорядоченного множества $\langle L, \leq \rangle$, и преимущество здесь в геометрическом представлении⁹; во втором случае решетка $\langle L, \leq \rangle$ характеризуется как алгебра $\langle L, \vee, \wedge \rangle$, т.е. как множество с заданными на нем двумя бинарными операциями. Кратко рассмотрим первый случай, а затем акцентируем внимание на втором подходе (см. [Гретцер 1982]).

Отношения, обладающие свойствами рефлексивности ($x \leq x$), антисимметричности (из $x \leq y$ и $y \leq x$ следует $x = y$) и транзитивности (из $x \leq y$ и $y \leq z$ следует $x \leq z$), называются *отношениями частичного порядка*, а множества, на которых заданы такие отношения, называются *частично упорядоченными множествами* (кратко *ч.у. множествами*). Ч.у. множество $\langle L, \leq \rangle$, которое обладает также свойством линейности ($x \leq y$ или $y \leq x$), называется *цепью* (его называют также *линейно упорядоченным множеством*). Далее определяются *sup* и *inf* в произвольном ч.у. множестве (т.е. в $\langle L, \leq \rangle$).

Пусть $H \subseteq L$ и $x \in L$. Тогда x называется *верхней границей* подмножества H , если $h \leq x$ для всех $h \in H$. Верхняя граница x подмножества H называется его *верхней гранью* или *супремом*, если $x \leq y$ для любой верхней границы y подмножества H . Это записывается через $x = \sup H$ или $x = \vee H$. Понятие *нижней границы* и *инфимума* определяется аналогично (двойственным образом) и инфимум записывается через $\inf H$ или $\wedge H$.

⁹ Подобным образом была представлена четырехэлементная решетка, элементами которой являлись трехзначные регулярные логики Клини (см. 3.4.5). См. также решетку расширений слабой логики Клини (3.9) и в особенности «Приложение».

Ч.у. множество $\langle L, \leq \rangle$ называется *решеткой*, если для всех $x, y \in L$ существуют $\sup\{x, y\}$ и $\inf\{x, y\}$. Решетка L называется *полной*, если $\vee H$ и $\wedge H$ существуют для любого подмножества $H \in L$.

Приведем два важных свойства ч.у. множеств: 1) линейно упорядоченное множество с \sup и \inf образует (дистрибутивную) решетку; 2) пусть $\mathcal{P}(E)$ есть множество всех подмножеств множества E , упорядоченное отношением включения \subseteq . Тогда $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq \rangle$ есть (булева) решетка.

Однако во многих случаях предпочтительней охарактеризовать решетку $\langle L, \leq \rangle$ как алгебру $\langle L, \vee, \wedge \rangle$. Тогда все понятия и методы универсальной алгебры были бы применимы к решеткам. В этом случае частичный порядок \leq вводится так: $x \leq y$ означает $x \wedge y = x$.

Непустое множество L с двумя бинарными операциями \vee и \wedge на L называется *решеткой*, если L удовлетворяет следующим тождествам:

- I. (a) $x \vee x = x$
(b) $x \wedge x = x$ (идемпотентность)
- II. (a) $x \vee y = y \vee x$
(b) $x \wedge y = y \wedge x$ (коммутативность)
- III. (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (ассоциативность)
- IV. (a) $x \vee (x \wedge y) = x$
(b) $x \wedge (x \vee y) = x$ (поглощение)¹⁰.

Обратим внимание, что единственными аксиомами, связывающими верхнюю полурешетку $\langle L; \vee \rangle$ с нижней полурешеткой $\langle L; \wedge \rangle$, являются аксиомы поглощения (IV). Непустое множество L называется *квази-решеткой* [Płonka 1967], если выполняются только тождества (I) – (III).

Решетка L называется *дистрибутивной*, если выполняются законы дистрибутивности:

- V. (a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
(b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ¹¹.

¹⁰ Заметим, что пара тождеств (I) выводима из остальных.

¹¹ Один из законов дистрибутивности выводим из остальных тождеств.

Дистрибутивные решетки лежат в основе большинства хорошо известных многозначных логик. Специально дистрибутивным решеткам посвящена монография [Balbes and Dwinger 1974].

Дистрибутивные решетки L называются *решетками Де Моргана* [Moisil 1935], или *дистрибутивными решетками с инволюцией* (*distributive i-lattices*) [Kalman 1958], если для одноместной операции \sim выполняются тождества

$$\text{VI. } \sim\sim x = x$$

$$\text{VII. } \sim(x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$$

$$\text{VIII. } \sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y.$$

Решетка L с двумя нульарными операциями 0 и 1 называется *ограниченной*:

$$\text{IX. (a) } x \vee 0 = x$$

$$(b) x \wedge 1 = x.$$

$$\text{X. (a) } x \vee 1 = 1$$

$$(b) x \wedge 0 = 0.$$

Ограниченные решетки иногда называются алгебрами¹². Соответственно ограниченные дистрибутивные решетки $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ с отрицанием Де Моргана (тождества VI – VIII) называются *алгебрами Де Моргана* [Balbes and Dwinger 1974]¹³. Алгебры Де Моргана (решетки Де Моргана), в которой операция \sim удовлетворяет условию

$$(K). \quad x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y \text{ для всех } x, y \in L,$$

называются *алгебрами Клини* (*решетками Клини*) [Kalman 1958].

О характеристическом тождестве, превращающем алгебру де Моргана в алгебру Клини, см. ниже в разделе 9.2. Условие (закон) Клини является довольно-таки сильным свойством и не имеет места, например, в четырехзначной логике Белнапа (см. ниже раздел 5.4.4).

¹² Вопрос здесь чисто терминологический, поскольку решетка $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ есть алгебра с двумя бинарными операциями, которые удовлетворяют тождествам (I) – (IV). Тем не менее, Г. Гретцер [Гретцер 1982: 150] вводит это различие.

¹³ В книге Е. Расёвой [Rasiowa 1974a] алгебры де Моргана изучаются под названием *квази-булевых алгебр*.

4.4.1. Булевы алгебры

В ограниченной решетке L элемент y называется *дополнением* x , если $x \wedge y = 0$ и $x \vee y = 1$. В этом случае элемент y обозначают $\sim x$. *Булевой алгеброй* называется дистрибутивная решетка с дополнениями. Можно показать, что в булевой решетке каждый элемент имеет *единственное* дополнение. Имеется большое число различных (эквивалентных) систем тождеств, определяющих класс булевых алгебр.

Например, алгебра $B = \langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ называется *булевой алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и выполняются следующие два тождества для операции дополнения:

$$(B1). x \vee \sim x = 1$$

$$(B2). x \wedge \sim x = 0.^{14}$$

Понятно, что булева алгебра является также алгеброй де Моргана и Клини, поскольку все условия для последних выполняются в булевой алгебре.

Примеры. 1) *Алгебра классических истинностных значений*. Двухэлементная структура $B_2 = \langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ с операциями, определенными посредством истинностных таблиц, является булевой алгеброй. Другими словами, алгебра B_2 является *простейшей моделью* булевой алгебры.

2) *Алгебра подмножеств*. Пусть $P(U)$ есть множество всех подмножеств некоторого множества U . Для $X \in P(U)$ определим $\sim X$ как дополнение $U \setminus X$ множества X , а для X и Y из $P(U)$ пусть $X \cup Y$ обозначает обычное теоретико-множественное объединение множеств X и Y , а $X \cap Y$ обозначает теоретико-множественное пересечение множеств X и Y . Тогда $\langle P(U), \cup, \cap, \sim \rangle$ оказывается булевой алгеброй. Роль 0 играет пустое множество \emptyset , а 1 есть U .

Классическим и одним из наиболее важных результатов в теории булевых алгебр стала *Теорема представления Стоуна*

¹⁴ Уже в 1904 г. Е. Хантингтоном была представлена весьма полезная независимая аксиоматизация булевых алгебр тождествами (II), (V), (IX), (B1) и (B2). В [Яглом 1980] пара тождеств (IX) может быть заменена на тождество (VI).

[Stone 1936]: Любая булева алгебра изоморфна алгебре подмножеств подходящего множества¹⁵.

Таким образом, булевы алгебры полностью сводятся к алгебрам подмножеств. Например, для конечных булевых алгебр: если $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ есть любая булева алгебра, то существует определенное множество U и множество B всех подмножеств U , замкнутое относительно булевых операций, такое, что алгебра \mathcal{A} изоморфна булевой алгебре $\mathcal{B} = \langle B, \vee, \wedge, \sim, \emptyset, U \rangle$.

Другая теорема представления утверждает: каждая булева алгебра изоморфна подалгебре прямого произведения двухэлементной булевой алгебры B_2 ; или в другой формулировке: каждая булева алгебра изоморфна подпрямому произведению двухэлементной булевой алгебры B_2 .

Алгебры Буля, явившись результатом исследований Г. Буля в области законов правильных рассуждений (1847 г.), нашли самое широкое применение в логико-математических исследованиях, в области инженерии контактно-релейных схем, компьютерных наук, аксиоматической теории множеств, теории моделей и в других областях науки и математики. Хорошее введение в теорию булевых алгебр имеется в [Burris and Sankaranarayanan 1981, ch. 4]. См. также [Владимиров 1969]. Популярное изложение имеется в [Яглом 1980], где рассматриваются также конечные булевы алгебры. Имеется трехтомный справочник по булевым алгебрам [Monk (ed.), 1989].

4.4.2. Другие “логические” алгебры

Особое место в исследовании многозначных логик занимают алгебры Гейтинга¹⁶. Пусть L — решетка с 0, тогда элемент \bar{x} называется *псевдодополнением* элемента $x \in L$, если $x \wedge \bar{x} = 0$ и $x \wedge y = 0$ влечет за собой $y \leq \bar{x}$. Любой элемент не может иметь более одного псевдодополнения. Обобщение понятия псевдодополнения ведет к понятию *относительного псевдодополнения*. Пусть L — непустое множество и $x, y \in L$. Элемент $z \in L$ называется *псевдодополнением* элемента x относительно y , если z — наибольший элемент со свойством $x \wedge z \leq y$. Относительное псевдодополнение обозначается посредством $x \Rightarrow y$. Решетка L называется

¹⁵ Значение теоремы Стоуна в философской логике, к которой относится и многозначная логика, рассмотрено в [Dunn and Hardegree 2001]. О современной философской логике см. в [Карпенко 2003] и [Karpenko 2008].

¹⁶ Алгебры Гейтинга под названием *брауэровы алгебры* были введены Г. Биркгофом в 1940 г. (см. [Биркгоф 1984, гл. 12]).

импликативной (см. [Расёва и Сикорский 1972, гл. 1, § 12])¹⁷, если $x \Rightarrow y$ существует для всех элементов $x, y \in L$. Заметим, что решетка $s \Rightarrow$ обладает наибольшим элементом 1, так как для любого x , $x \Rightarrow x = 1$; и, главное, решетка $s \Rightarrow$ является дистрибутивной. Каждая импликативная решетка с наименьшим элементом 0 есть алгебра Гейтинга¹⁸. Или, по-другому, алгебры Гейтинга являются решетками $s \Rightarrow$, резидуальными относительно пересечения [Blyth and Janowitz 1972], где резидуалом относительно \wedge является как раз операция \Rightarrow , определяемая следующим образом:

$$x \leq y \Rightarrow z \text{ т.т.т., когда } x \wedge y \leq z.^{19}$$

Как эквациональный класс $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Гейтинга, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка и для бинарной операции \Rightarrow выполняются следующие три тождества [Эсакиа 1985: 23]:

$$(H1). x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$$

$$(H2). x \wedge (y \Rightarrow z) = x \wedge (x \wedge y \Rightarrow x \wedge z)$$

$$(H3). (x \wedge y \Rightarrow x) \wedge z = z.$$

Заметим, что в алгебре Гейтинга имеет место $\neg x = x \Rightarrow 0$. Если к алгебре Гейтинга $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ добавить, например, закон исключенного третьего $x \vee \neg x = 1$ или закон двойного отрицания $\neg \neg x = x$, то получим аксиоматизацию булевой алгебры.

Дистрибутивные решетки с операцией \Rightarrow (но в других обозначениях), а также с дуальной к ней операцией \Leftarrow впервые исследовались Т. Скулемом, начиная с 1919 г. (см. [Карри 1969, гл. 4]). Такие алгебры Х. Карри называет *скулемовскими структурами*.

Операция \Leftarrow есть бинарная операция, дуальная к \Rightarrow , т.е. элемент $z (= x \Leftarrow y)$ является наименьшим элементом со свойством $x \vee z \geq y$. Операция $x \Leftarrow y$ в [Расёва и Сикорский 1972: 72] называется «псевдоразностью». В [McKinsey and Tarski 1946] алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \Leftarrow, 0, 1 \rangle$ изучается под названием *брауэровой*

¹⁷ Название «импликативная решетка» впервые появилось у Х. Карри (см. [Карри 1969]). Здесь на с. 223 импликативные решетки задаются как эквациональный класс посредством пяти тождеств.

¹⁸ В [Расёва и Сикорский 1972] алгебры Гейтинга изучаются под названием *псевдобулевых алгебр*.

¹⁹ Понятие *резидуальности* станет центральным при конструировании нечетких логик, основанных на t-нормах (см. ниже раздел 9.4).

алгебры. Или, по-другому, алгебры Брауэра являются решетками с 1, резидуальными относительно объединения:

$$x \geq y \Leftrightarrow z \text{ т.т.т., когда } x \vee y \geq z.$$

Заметим, что в алгебре Брауэра имеет место $\lceil x = x \Leftarrow 1$, где унарная операция \lceil называется *дуальным псевдодополнением*.

Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow, 0, 1 \rangle$ называется *дважды (double) гейтинговой алгеброй*, или *дважды брауэровой алгеброй*, или *полу-булевой алгеброй* (под этим названием она аксиоматизируется в работе [Rauszer 1974])²⁰, или *алгеброй Скулема* [Григолия 1987], если $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Гейтинга, а $\langle L, \vee, \wedge, \Leftarrow, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Брауэра. Дважды алгебры были введены, чтобы восстановить принцип дуальности булевой алгебры. См. об этом [Iturrioz 1983, p. 33], [Эсакиа 1985, § 11]²¹.

Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 0, 1 \rangle$ называется *симметрической алгеброй Гейтинга* [Monteiro A. 1969], если $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Гейтинга и $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 0, 1 \rangle$ есть алгебра де Моргана. Операция \sim на решетке L позволяет рассмотреть принцип дуальности: каждое утверждение, доказанное для \vee, \wedge и \sim , остается истинным, если \vee и \wedge заменить соответственно на \wedge и \vee . Более того, здесь $x \Leftarrow y = \sim(\sim x \Rightarrow \sim y)$. Таким образом, симметрическая алгебра Гейтинга есть дважды алгебра Гейтинга²².

Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \lceil, 0, 1 \rangle$ называется *p-алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная (дистрибутивная) решетка и для любого $x \in L$ элемент $\lceil x$ является *псевдодополнением* элемента x , т.е. $x \wedge a = 0$ т.т.т., когда $a \leq \lceil x$. Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \lceil, \lceil, 0, 1 \rangle$ называется *дважды p-алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, \lceil, 0, 1 \rangle$ есть p-алгебра и $\langle L, \vee, \wedge, \lceil, 0, 1 \rangle$ — *дуальная p-алгебра*, где для любого $x \in L$ элемент $\lceil x$ является *дуальным псевдодополнением* элемента x , т.е. $x \vee a = 1$ т.т.т., когда $a \geq \lceil x$.

Начиная с середины 60-х годов, изучение дистрибутивных решеток с псевдодополнениями (и дуальными псевдодополнениями) стало отдельным направлением в области алгебраических структур (см. [Гретцер 1982, гл. II, § 6]).

²⁰ Здесь же во второй части работы под названием «Н-В-логика» дается аксиоматизация интуиционистской пропозициональной логики с дополнительными операциями \lceil и \Leftarrow .

²¹ Свойства дважды алгебр Гейтинга суммируются в [Sankappanavar 1985].

²² Историю вопроса о введении понятия *симметрической алгебры Гейтинга* см. в [Iturrioz 1983: 33-34]. Изучению симметрических алгебр посвящена монография [Monteiro A. 1980].

Введем новые понятия.

Непустое множество назовем *промежуточной решеткой*, если выполняются тождества (I), (III), (IV)²³; и *ограниченной промежуточной решеткой*, если выполняются тождества (I), (III), (IV), (IX), (X), причем в $X(a)$ переставлены местами дизъюнктивные члены, а в $X(b)$ переставлены местами конъюнктивные члены.

Некоммутативной алгеброй Клини назовем алгебру $\langle L, \vee, \wedge, \sim, 1, 0 \rangle$, где $L \neq \emptyset$, \vee и \wedge — бинарные операции на L , а \sim — унарная операция на L , удовлетворяющие условиям (I), (III), (IV) — (VIII), тождество (X) и закон Клини изменены:

X. (a) $1 \vee x = 1$ (левая единица относительно дизъюнкции)

(b) $0 \wedge x = 0$ (левый ноль относительно конъюнкции)

K. $(y \wedge \sim y) \vee (x \vee \sim x) = y \vee \sim y$ (переставленный закон Клини).

Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ называется *промежуточной r -алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная промежуточная решетка и для любого $x \in L$ элемент $\neg x$ является псевдодополнением элемента x . Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \neg, \neg, 0, 1 \rangle$ называется *дважды промежуточной r -алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ есть промежуточная r -алгебра и $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ — дуальная промежуточная r -алгебра, где для любого $x \in L$ элемент $\neg x$ является дуальным псевдодополнением элемента x .

Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ называется *слабой r -алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная квази-решетка, снабженная операцией псевдодополнения \neg . Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \neg, \neg, 0, 1 \rangle$ называется *дважды слабой r -алгеброй*, если $\langle L, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ — дуальная промежуточная r -алгебра, снабженная операцией дуального псевдодополнения.

4.5. Алгебраическая семантика

Алгебраическое рассмотрение многозначных логик служит весьма полезным инструментом при выяснении структуры и взаимоотношения последних. В общем случае существенным является вопрос о построении *алгебраической семантики*, под

²³ Иными словами, в промежуточной решетке не имеют места законы коммутативности.

которой понимается класс всех моделей некоторой алгебры \mathcal{A} логики L .

В алгебраизации логики²⁴ особую роль сыграла оригинальная идея А. Линденбаума (1926/27), который предложил рассматривать формализованный пропозициональный язык \mathcal{L} как универсальную алгебру формул $\mathfrak{F} = \langle Fm, \neg, \supset, \vee, \wedge \rangle$ с операциями, соответствующими логическим связкам этого же языка \mathcal{L} (см. примечание 4 в этой главе). Следующий шаг приводит нас к алгебре Линденбаума, которая играет важнейшую роль в процессе алгебраизации логики.

Рассмотрим бинарное отношение \approx на множестве формул Fm пропозиционального языка классической логики C_2 : $A \approx B$ т.т.т., когда $A \equiv B$ есть доказуемая формула. Легко убедиться, что \approx есть отношение эквивалентности на множестве формул Fm и является конгруэнцией на алгебре формул $\mathfrak{F} = \langle Fm, \neg, \supset, \vee, \wedge \rangle$. Тогда Fm/\approx обозначает фактор-множество по отношению эквивалентности \approx . Класс эквивалентности, содержащий A , будем обозначать посредством $|A|$. Для произвольных классов эквивалентности $|A|$ и $|B|$ из Fm/\approx пусть $|A| \cup |B| = |A \vee B|$, $|A| \cap |B| = |A \wedge B|$ и $\neg|A| = |\neg A|$. Тогда алгебра $\mathcal{L}^* = \langle Fm/\approx, \cup, \cap, \neg, 0, 1 \rangle$ называется алгеброй Линденбаума²⁵ (классической логики) и есть не что иное, как булева алгебра²⁶. Другими словами, алгебры Линденбаума классической пропозициональной логики, полученные подобным образом, являются (с точностью до изоморфизма) счетными булевыми алгебрами. Нулевым элементом 0 здесь является класс всех противоречий $|A \wedge \neg A|$, а единицей 1 — класс эквивалентности, состоящий из всех тавтологий $|A \vee \neg A|$.

Легко видеть, что между эквивалентностями классической логики высказываний C_2 и тождествами булевой алгебры существует соответствие. Например, между формулой $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ и первым тождеством в (II). Более того, $\vdash A$ в C_2 т.т.т., когда $A^* = 1$ в \mathcal{L}^* , где A^* есть аналог A на языке алгебры \mathcal{L}^* . Таким образом, возникают средства для алгебраического доказательства дедуктивной полноты логических исчислений. Основываясь на этом, А. Тарский в 1935 г. в точности устанавливает связь между

²⁴ В [Карпенко 2004, раздел 5] алгебраизация логики выделена в одну из основных тенденций её современного развития.

²⁵ Полное признание этот метод получил в 40-е годы прошлого века в терминологии “алгебры Линденбаума”, или “алгебры Линденбаума-Тарского”. Построение алгебры Линденбаума имеется в [Расёва и Сикорский 1972, гл. VI, § 10].

²⁶ Таким образом, мы имеем еще один пример булевой алгебры.

классическим пропозициональным исчислением и булевой алгеброй (так называемый метод Линденбаума–Тарского).

К середине прошлого века Л. Хенкином, Р. Сикорским, Е. Расёвой и др. было осознано, что этот метод может быть применен к другим логикам со связкой импликации, удовлетворяющей некоторым базисным свойствам. Такого рода обобщение было проведено в хорошо известной книге Е. Расёвой [Rasiowa 1974a], где впервые вводится понятие «алгебраического примера (counterpart) логики». Магистральное развитие алгебраической логики²⁷ состояло в систематическом исследовании широкого класса логик алгебраическими методами. Одной из целей явилось установление общего критерия для класса алгебр (или для класса математических объектов, тесно связанных с алгебрами) быть алгебраическим примером логики и развитие для этого самих методов.

Первым примером алгебраической семантики для пропозициональных логик являются класс **ВА** булевых алгебр, который является алгебраической семантикой для классической логики S_2 . Каждая булева алгебра имеет наибольший элемент согласно их естественному порядку, который обычно обозначается посредством 1^A . Этот элемент взят как выделенный, относительно которого дана алгебраическая семантика. Тогда точное определение алгебраической семантики для классической логики S_2 выглядит следующим образом:

$\Gamma \vdash_S A$ т.т.т., когда для каждой $A \in \mathbf{ВА}$ и каждой оценки v на A , если для всех $B \in \Gamma$ $v(B) = 1^A$, тогда $v(A) = 1^A$.

Импликация слева направо есть теорема об алгебраической корректности, а импликация в другую сторону есть теорема об алгебраической полноте, доказательство которой основано на методе Линденбаума–Тарского (см. современное изложение этого метода в [Jansana 2006]).

Заметим, что если вместо класса **ВА** булевых алгебр возьмем класс алгебр Гейтинга, то этот класс является в точности алгебраической семантикой (в выше определенном смысле) для интуиционистской пропозициональной логики **Int**.

Класс логик, для которых имеет место алгебраическая семантика, обычно детерминированная алгеброй Линденбаума, получил название протоалгебраизуемых логик [Blok and Pigozzi

²⁷ Уже в 1962 г. под таким названием появилась монография П. Халмоша [Halmos 1962]. Интересно, что под таким же названием большая статья включена во второе издание «Справочника по философской логике» (см. [Andréka, Németi and Sain 2001]).

1986]²⁸. Протоалгебраизуемые логики включают в себя почти все хорошо известные логики и составляют главный класс логик, для которых углубленные методы универсальной алгебры могут быть применены к их логическим матрицам, чтобы получить строгие и интересные результаты. Именно алгебры Линденбаума являются фундаментальным свойством протоалгебраизуемых логик.

Однако не всякая логика может быть алгебраизуема подобным образом. Для этого логическая связка эквиваленции должна быть подходящей. Например, в релевантной логике **R** и логике следования **E** (см. ниже раздел 8.5) существуют теоремы *A* и *B*, для которых импликация $A \rightarrow B$ не есть теорема. Следовательно, множество всех теорем не совпадает с классом эквивалентности, определенным отношением \approx . Поэтому встал вопрос об обобщении метода Линденбаума–Тарского, т.е. ставится вопрос о подходящем обобщении отношения конгруэнтности на алгебрах и построении более общей теории алгебраизуемых логик. В уже ставшей классической работе В. Блока и Д. Пиготци [Blok and Pigozzi 1989] вводится *лейбницево отношение конгруэнтности*²⁹, строго определяется понятие *алгебраической семантики* (см. выше), а понятию *алгебраизуемая логика* дано математически точное определение. Основополагающая идея состояла в следующем: логика является *алгебраизуемой*, если существует класс алгебр, относящийся к этой логике точно так же, как существует класс булевых алгебр, относящихся к классической логике. Заметим, что понятие алгебраизуемой логики, введенное в этой работе, относится только к финитарным логикам (см. сноску 3 в этой главе), которые еще называются “*конечно-алгебраизуемыми логиками*”.

Здесь уже релевантная логика **R** является алгебраизуемой, но не **E** (об этих логиках см. в разделе 8.5.1). Неалгебраизуемыми оказываются импликативные фрагменты этих логик, в то время как \mathbf{H}_{\rightarrow} и $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ алгебраизуемы (см. в Приложении решетки импликативных логик). Доказано также, что известная паранепротиворечивая логика да Косты **C**₁ неалгебраизуема (см. об этом ниже в разделе 8.6.3.1), а следовательно, все логики из класса **C**_n. С алгебраизацией паранепротиворечивых логик вообще возникают трудности, в силу отсутствия в них правила подстановочности эквивалентности (см. там же).

Тем не менее *алгебраическая семантика* имеет место для исключительно широкого класса логических систем. См. [Font and

²⁸ Их теория развита в монографии Я. Челаковского [Czelakowski 2001].

²⁹ См. также [Blok and Pigozzi 1986].

[Jansana 1996] и [Blok and Rebagliato 2003]. Наличие алгебраической семантики для некоторой логики L имеет большое методологическое значение. Речь идет о связи между отдельным металогическим свойством специфической логики L , которая является алгебраизуемой, и алгебраическим свойством ассоциированного с нею класса алгебр $\text{Alg}(L)$. Например, L допускает строго полную гильбертовскую аксиоматизацию ($\Gamma \vdash A$ т.т.т., когда $\Gamma \models A$) т.т.т., когда $\text{Alg}(L)$ есть финитно аксиоматизируемое квази-многообразие. Алгебраизация логики достигла такого уровня, что возникла уверенность, что *всё в логике есть законы алгебры* (см., например, [Halmos and Givant 1998]).

Абстракция метода Линденбаума–Тарского играет главную роль в развитии самой алгебраической логики. В результате в конце XX века появился термин “абстрактная алгебраическая логика” (см. обзор [Font, Jansana, and Pigozzi 2003]). Здесь дается классификация логик под названием “иерархия Лейбница”. Приводится 10 классов логик (см. рис. 1 на с. 49), в один из которых входит *всего лишь* классическая логика S_2 наряду с интуиционистской логикой Int , нормальными модальными логиками Льюиса, различными конечнозначными логиками, бесконечнозначной логикой Лукасевича L_∞ и т.д. Алгебраизацию многозначных логик Лукасевича мы в дальнейшем рассмотрим.

Однако заметим, что для большинства интересующих нас логик хорошо работает теория логических матриц. Более того, в основном мы можем ограничиться лишь *характеристическими матрицами*. Такая семантика гораздо проще, чем алгебраическая, и с философской точки зрения предпочтительней.

4.5.1. Алгебраизация L_3

Теперь рассмотрим алгебраические примеры трехзначной логики Лукасевича L_3 . В разделе 2.1.2 было показано, что логики с множествами исходных связок $\{\rightarrow, \sim\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, \diamond\}$ эквивалентны. Именно в этой сигнатуре в [Moisil 1940] было введено понятие трехэлементной алгебры Лукасевича, аксиоматизация которой была значительно упрощена А. Монтейро [Monteiro A. 1963]:

$$L_3 = \langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \vee, \wedge, \sim, \diamond, 1 \rangle$$

есть трехэлементная алгебра Лукасевича, где $\langle \{1, \frac{1}{2}, 0\}, \vee, \wedge, 1 \rangle$ есть дистрибутивная решетка с 1 и для унарных операторов \sim и \diamond выполняются следующие тождества:

1. $\sim\sim x = x$,
2. $\sim(x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$,
3. $\sim x \vee \Diamond x = 1$,
4. $x \wedge \sim x = \sim x \wedge \Diamond x$,
5. $\Diamond(x \wedge y) = \Diamond x \wedge \Diamond y$.³⁰

Или, по-другому, трехэлементная алгебра Лукасевича L_3 есть алгебра де Моргана, снабженная операцией \Diamond , удовлетворяющей условиям (3), (4), (5). Или, по-другому, L_3 есть алгебра Клини, снабженная операцией \Diamond , удовлетворяющей условиям (3), (4). Заметим, что существует большое число эквивалентных алгебраических построений для L_3 . Чтобы это как-то систематизировать, обратим внимание на следующий факт: все сформулированные выше алгебры, начиная с алгебры де Моргана, на двухэлементном множестве $\{0, 1\}$ превращаются в булеву двухэлементную алгебру.

С введением третьего элемента положение становится не столь тривиальным, однако все указанные дважды алгебры, а также симметрическая алгебра Гейтинга и некоторые объединения их сигнатур являются трехэлементными алгебрами Лукасевича L_3 , поскольку трехзначные логики со множествами связок $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \sim\}$, $\{\vee, \wedge, \neg, \vdash\}$, $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \vdash\}$, $\{\vee, \wedge, \Leftarrow, \neg\}$, $\{\vee, \wedge, \sim, \vdash\}$ функционально эквивалентны и все представляют L_3 .

Поэтому неудивительно, что в [Monteiro L. 1970] дана характеристика L_3 в терминах симметрической алгебры Гейтинга³¹; в [Varlet 1968; 1969] — в терминах дважды p -алгебр; в [Iturrioz 1976] — в терминах дважды алгебры Гейтинга, и в [Becchio 1978] — в терминах алгебры Гейтинга с дуальным псевдодополнением и в терминах дуальной алгебры Гейтинга с псевдодополнением. Заметим, что приведенную выше аксиоматизацию L_3 можно рассматривать как аксиоматизацию в терминах алгебры де Моргана с псевдодополнением \neg , если заменить всюду оператор \Diamond на \neg . Также в разделе (8.1.1) мы приведем алгебраический пример L_3 в виде трехэлементной MV -алгебры. Имеются и другие

³⁰ Как показано в [Monteiro A. 1963], эти пять тождеств вместе с двумя тождествами: $x \wedge (x \vee y) = x$ и $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ являются независимой аксиоматизацией L_3 .

³¹ То, что трехэлементная алгебра Лукасевича есть алгебра Гейтинга, а на самом деле симметрическая алгебра Гейтинга, было впервые показано Г. Мойсилом [Moisil 1963a].

алгебраические рассмотрения \mathbf{L}_3 . См., например, [Monteiro A. 1980, ch. VII] и [Abad and Figalla 1984]). Современный уровень алгебраического анализа \mathbf{L}_3 см. в [Cignoli and Monteiro 2006], где дана характеристика структуры максимальных подалгебр трехзначных алгебр Лукасевича (см. ниже раздел 7.5.2).

Обратим также внимание на представление \mathbf{L}_3 в виде *промежуточной p -логики* со связками $\{\vee^{\rightarrow}, \wedge^{\rightarrow}, \top\}$ (см. 3.4.6). Отсюда следует, что \mathbf{L}_3 можно рассматривать как *промежуточную p -алгебру*.

Интересно проследить изменение алгебраических структур с увеличением числа элементов. Например, известно, что если $n > 3$, то отрицание де Моргана нельзя определить посредством псевдодополнения и дуального псевдодополнения вместе с решеточными операциями. Поэтому уже точная характеристика \mathbf{L}_4 посредством дважды p -алгебр непригодна. Все дело в том, что функциональные свойства \mathbf{L}_3 настолько «богаты»³² и обладают таким «критическим» свойством, что допускают много различных алгебраических характеристик.

4.5.2 Алгебраизация некоторых других трехзначных логик

Очевидно, что трехзначная матричная логика Гейтинга \mathbf{G}_3 есть модель для алгебры Гейтинга. В свою очередь, \mathbf{G}_3^* есть трехзначная модель для алгебры Брауэра. Алгебраизация \mathbf{G}_3 приводится в [Pauc 1965b].

В [Финн 1974a] вводится понятие трехэлементной алгебры Бочвара. Более подробно об этом см. в [Finn and Grigolia 1993], где алгебраизация \mathbf{B}_3 дается в сигнатуре $\langle \cup, \cap, \sim, J_0, J_{1/2}, J_1, 0, 1 \rangle$. Здесь $\langle \cup, \cap, \sim \rangle$ есть деморгановская дистрибутивная квази-решетка. Известно, какую роль играют дистрибутивные решетки с псевдодополнением (p -алгебры). Обратим внимание на представление логики \mathbf{B}_3 Н.Е. Томовой в виде *слабой p -логики* со связками \cup, \cap и \top (см. 3.4.6). Отсюда следует, что алгебраизацию \mathbf{B}_3 можно представить в очень простом виде, а именно как квази-решетку, снабженную трехзначной операцией псевдодополнения.

Заметим, что в работе [Finn and Grigolia 1993] дается также алгебраизация трехзначной логики Эббингауза \mathbf{E}_3 в сигнатуре $\langle \vee^E, \cap, \sim, J_0, J_{1/2}, J_1, 0, 1 \rangle$, где $\langle \vee^E, \cap, \sim \rangle$ есть дистрибутивная решетка без законов де Моргана.

³² Точный смысл этого слова будет определен в разделе 7.3.3.2.1.

Теперь на алгебраическом уровне мы можем сделать различие между логикой Клини K_3 (сильные связки) и логикой Клини K_3^w (слабые связки или, по-другому, внутренние связки Бочвара). В основе алгебры для K_3 лежит деморгановская дистрибутивная решетка, а в основе алгебры для K_3^w лежит деморгановская дистрибутивная квази-решетка. Это означает, что в K_3 имеет место эквивалентность $A \vee (A \wedge B) \equiv A$, т.е. формулы $A \vee (A \wedge B)$ и A имеют одну и ту же истинностную таблицу (реализуют одну и ту же функцию), а в K_3^w нет. То, что существуют логики, в основе алгебраической семантики которых лежит не решеточная структура, а квази-решетка, впервые было обнаружено В.К. Финном [Финн 1974а: 417] при рассмотрении трехзначной логики Бочвара B_3 .

Как уже говорилось, наиболее важным примером алгебры Клини является матрица трехзначной логики Клини K_3 , а примером некоммутативной алгебры Клини является матрица логики **Lisp** (см. 3.4.4).

Наконец, обратим внимание, что связки \wedge и \vee в P^1 не являются даже полурешеточными [Mortensen 1989]. Алгебраическая структура P^1 исследована в [Lewin, Mikenberg and Schwarze 1990] и [Pynko 1995b]. Здесь же дано алгебраическое доказательство максимальности P^1 . Относительно I^1 алгебраические результаты содержатся в [Sette and Carnielli 1995].

5. КОНЕЧНОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

5.1. Конечнзначные логики Лукасевича \mathcal{L}_n

Несомненно, из всех конечнзначных логик наибольший интерес представляют логики Лукасевича \mathcal{L}_n . Взаимоотношения между этими логиками, классы их расширений, критерий Мак-Нотона о выразимости функций — все говорит о необычных свойствах этих логик. Эта необычность отражается как на их гильбертовской аксиоматизации, так и на их алгебраическом представлении. Тем не менее, главная особенность \mathcal{L}_n связана с их функциональными свойствами и неожиданными следствиями из этого (см. раздел 7.6).

5.1.1. Матричная логика \mathcal{L}_n

Из всех конечнзначных логик наиболее известными являются конечнзначные логики Лукасевича \mathcal{L}_n , матричное определение которых впервые появилось в [Łukasiewicz 1922/1923]. Эти логики являются обобщением трехзначной логики \mathcal{L}_3 и формализуются в следующем пропозициональном языке \mathcal{L} .

Пусть p, q, r с индексами или без них суть пропозициональные переменные; \sim, \rightarrow суть логические связи и $(,)$ — вспомогательные символы. Понятие формулы определяется стандартно.

Другие логические связи вводятся по определению, как и для \mathcal{L}_3 .

Матрица вида $\mathfrak{M}_n^{\mathcal{L}} = \langle V_n, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$ называется n -значной логической матрицей Лукасевича ($n \in N, n \geq 2$), где $V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$; \sim есть унарная и \rightarrow бинарная операции отрицания и импликации соответственно, определенные на множестве V_n следующим образом:

$$\sim x = 1 - x,$$

$$x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y).$$

Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся по определению:

$$x \vee y =: (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

$$x \wedge y =: \sim(\sim x \vee \sim y).$$

Заметим, что здесь $x \vee y = \max(x, y)$ и $x \wedge y = \min(x, y)$ ¹.

Определим теперь функцию оценки v формул языка \mathcal{L} в матрице \mathfrak{M}_n^L . v есть функция оценки формул языка \mathcal{L} в матрице \mathfrak{M}_n^L , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция v определена для каждой формулы A ;
- 2) если A есть пропозициональная переменная, то $v(A) \in V_n$;
- 3) если A и B есть формулы, то

$$v(\sim A) = \sim v(A),$$

$$v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(B).$$

Обратим внимание, что здесь в левые части равенств входят пропозициональные связки, а в правые — символы матричных операций. Для простоты, и те и другие обозначаем одинаково.

Будем говорить, что формула A является тавтологией в матрице \mathfrak{M}_n^L , если $v(A) = 1$ для любой функции оценки v в матрице \mathfrak{M}_n^L . Наконец, многозначная матричная логика Лукасевича \mathbf{L}_n есть множество тавтологий в \mathfrak{M}_n^L .

Отметим, что матрица \mathfrak{M}_2^L является характеристической для классического пропозиционального исчисления \mathbf{C}_2 (см. раздел 1.4), а матрица \mathfrak{M}_3^L является характеристической для трехзначного исчисления \mathbf{L}_3 (см. раздел 3.1).

5.1.2. Отношения между конечнозначными логиками \mathbf{L}_n

Основное отношение между конечнозначными матричными логиками Лукасевича, т.е. между классами их тавтологий, описываются следующим условием Линденбаума [*Łukasiewicz and Tarski 1930, Theorem 19*]:

$$\mathbf{L}_n \subseteq \mathbf{L}_m \text{ т.т.т., когда } m-1 \text{ есть делитель } n-1.$$

Впервые доказательство этой теоремы было опубликовано Р. Аккерманном [*Ackermann 1967: 60-63*]².

Из этой теоремы имеем очевидное следствие для случая, когда $n-1$ есть простое число и $(n-1) > 1$:

$$\mathbf{L}_{kn} \subset \dots \subset \mathbf{L}_{2n} \subset \mathbf{L}_n \subset \mathbf{L}_2.$$

¹ Отметим, что так называемая n -значная логика Клини \mathbf{K}_n задается операциями \sim, \vee и \wedge , а $x \supset y$ есть $\sim x \vee y$.

² Другое доказательство, более простое, см. в [*Urquhart 1986: 83-84*]. Еще одно доказательство и ряд сопутствующих теорем имеется в [*Gottwald 2001, ch. 9.1.2*].

5.1.3. J_i -операторы

Особое место при изучении свойств конечнозначных логик Лукасевича занимают J_i -операторы, введенные Дж. Россером и А. Тюркеттом [Rosser and Turquette 1952]:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i \end{cases} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Ими доказана следующая

Теорема. J_i -операторы определимы посредством \rightarrow и \sim в \mathbb{L}_n (р. 18-22).

Это доказательство значительно упрощено в [Urquhart 1986: 82]. Заметим, что результат этой теоремы следует из критерия Мак-Нотона (о нем см. 5.1.5).

На самом деле J_i -операторы являются характеристическими функциями числа i , $i = 0, 1/n-1, 2/n-1, \dots, n-2/n-1, 1$, и обобщают некоторые свойства отрицания. В дальнейшем J_i -операторы будут не раз использоваться.

5.1.4. Оператор Слупецкого для \mathbb{L}_n

В [Rosser and Turquette 1952: 23-25] дано также обобщение результата Е. Слупецкого относительно \mathbb{L}_3^T (см. 3.1.1):

Пусть $T_{\frac{n-2}{n-1}}(x) = \frac{n-2}{n-1}$ для всех $x \in V$. Тогда система функций $\{x \rightarrow y, \sim x, T_{\frac{n-2}{n-1}}(x)\}$ функционально полна.

В свою очередь обобщением этого результата стала теорема Эванса—Шварца [Evans and Schwartz 1958]:

Пусть $T_i(x) = i$, где $0 < i < 1$. Тогда система функций $\{x \rightarrow y, \sim x, T_i(x)\}$ является функционально полной т.т.т., когда $(n-1, i) = 1$, т.е. $n-1$ и i есть взаимно простые числа³.

Этот результат независимо был открыт Р. Клэем [Clay 1962] как следствие теоремы:

Система функций $\{x \rightarrow y, \sim x, T_i(x)\}$ является функционально полной т.т.т., когда $(n-1, i_1, \dots, i_k) = 1$, где $0 < i_k < 1$ и $0 < k < n$.

³ Другое доказательство см. в [Бочвар и Финн 1972: 279-280].

В разделе (7.3.3) будет дано строгое определение понятия функциональной полноты.

5.1.5. Критерий Мак-Нотона выразимости операций в \mathbb{L}_n

В общем случае на вопрос о том, какие операции (функции) можно выразить в \mathbb{L}_n , дает ответ критерий выразимости Р. Мак-Нотона, который является следствием фундаментальной теоремы Мак-Нотона о выразимости функций в континуальной логике Лукасевича \mathbb{L}_∞ [McNaughton 1951] (см. ниже раздел 8.1):

Функция $f(\frac{x_1}{n-1}, \dots, \frac{x_k}{n-1}) = \frac{x}{n-1}$ выразима в матрице для \mathbb{L}_n тогда и только тогда, когда НОД $(x_1, \dots, x_k, n-1)$ есть делитель x (НОД — наибольший общий делитель)⁴.

С помощью критерия Мак-Нотона доказывается много важных теорем относительно многозначных логик Лукасевича (см. об этом [Токаж 1979]).

Следует отметить, что хотя Мак-Нотон дает необходимое и достаточное условие выразимости конечнозначной функции в \mathbb{L}_n , само доказательство не является конструктивным; оно только указывает, какие конечнозначные функции f являются выразимыми без указания метода, конструирующего \mathbb{L}_n -формулу, определяющую f в терминах \sim и \rightarrow . Эта проблема решена в [Takagi, Nakashima and Mukaidono 1999], где представлено другое необходимое и достаточное условие. Более того, в этой работе показывается, как выразить функцию в языке \mathbb{L}_n по ее истинностной таблице.

5.1.6. Аксиоматизация \mathbb{L}_n

В разделе (3.1) была рассмотрена аксиоматизация трехзначной логики Лукасевича \mathbb{L}_3 , предложенная М. Вайсбергом. Однако неясно, как этот способ аксиоматизации может быть распространен на конечнозначные логики \mathbb{L}_n . Правда, ему же принадлежит аксиоматизация \mathbb{L}_n для случая, когда $n-1$ есть простое число (доказательство не опубликовано). Как отмечается в [Łukasiewicz and Tarski 1930: 142], расширение этого результата на произвольное конечное n принадлежит Линденбауму (доказательство не опубликовано). Позже М. Вайсбергом [Wajsberg 1935] был предложен общий метод аксиоматизации широкого класса конечнозначных логик, куда входят также все n -значные логики Лукасевича. Однако метод,

⁴ В работе [Prucnal 1969] имеется другое доказательство этой теоремы.

предложенный Вайсбергом, весьма громоздок и практически мало пригоден.

Две неудачные попытки аксиоматизировать \mathbf{L}_n были предприняты Дж. Россером и А. Тюркеттом [Rosser and Turquette 1945, 1950]⁵. Наконец ими был разработан метод аксиоматизации [Rosser and Turquette 1952], который включает в себя в качестве исходного условия общезначимость законов *транзитивности*, *перестановки* и *утверждения консеквента* (см. выше гл. 1). Кроме этого здесь впервые было указано на обязательное наличие в аксиоматизируемой логике J_1 -операторов. Все эти условия выполняют, например, конечнозначные логики Лукасевича \mathbf{L}_n . Этот метод применим также для произвольного числа выделенных значений и распространяется на предикатные многозначные логики. Однако, как и предыдущий метод, он оказался весьма общим и громоздким в применении.

Только в начале 70-х годов появились сразу две аксиоматизации \mathbf{L}_n . После того как было дано алгебраическое доказательство полноты для бесконечнозначной логики Лукасевича \mathbf{L}_∞ , появилась возможность распространить этот метод на n -значный случай, что и было сделано Р. Григолия (см. [Григолия 1973] и [Grigolia 1977]). Аксиоматизация \mathbf{L}_n , предложенная Григолия, основана на том, что к четырем аксиомам для бесконечнозначной логики Лукасевича \mathbf{L}_∞ добавляются характеристические аксиомы для каждого n . Выглядит это следующим образом:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$
4. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $np \rightarrow (n-1)p$.

Если $n > 3$, то добавляется следующая аксиома:

$$6. (n-1) ((\sim p)^j \vee (p \wedge (j-1)p)),$$

где $1 < j < n-1$ и j не делит $n-1$; np и p^j есть сокращения для $p \vee p \vee \dots \vee p$ (n раз) и $p \wedge p \wedge \dots \wedge p$ (j раз) соответственно.

Правила вывода: МР и подстановка.

⁵ Из последней работы следует, что в \mathbf{L}_n выводим закон сокращения $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$, что не верно ни для какого $n \geq 3$.

Другой метод аксиоматизации предложен М. Токажем [Tokarz 1974a], который для этого существенно использовал критерий Мак-Нотона для выразимости операций в \mathbb{L}_∞ . Однако оба метода (особенно последний) требуют добавления формул слишком большой длины.

Поэтому особый интерес представляет работа Р. Тузьяка [Tuziak 1988], где аксиоматизация для \mathbb{L}_∞ проще, чем во всех предыдущих работах (правда, в другой сигнатуре, чем исходная у Лукасевича), и, главное, не опирается на такие сильные метатеоремы, как алгебраическое доказательство полноты для \mathbb{L}_∞ или критерий Мак-Нотона для \mathbb{L}_∞ , хотя для доказательства полноты и используются средства алгебры Линденбаума.

Новая аксиоматизация выглядит следующим образом для любого $n \geq 2$. Используются следующие сокращения: $p \rightarrow^0 q = q$, $p \rightarrow^{k+1} q = p \rightarrow (p \rightarrow^k q)$ и $p \equiv q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

$$1. p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$2. (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$3. ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$$

$$4. (p \rightarrow^n q) \rightarrow (p \rightarrow^{n-1} q).$$

$$5. p \wedge q \rightarrow p.$$

$$6. p \wedge q \rightarrow q.$$

$$7. (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)).$$

$$8. p \rightarrow p \vee q.$$

$$9. q \rightarrow p \vee q.$$

$$10. (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)).$$

$$11. (\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p).$$

$$12. (p \equiv (p \rightarrow^{s-2} \sim p)) \rightarrow^{n-1} p \text{ для любого } 2 \leq s \leq n-1, \text{ такого, что } s \text{ не есть делитель } n-1.$$

Правила вывода: МР и подстановка.

Обратим внимание, что при $n = 2$ и $n = 3$ аксиома (12) отсутствует. При $n = 2$ мы имеем аксиоматизацию классической пропозициональной логики. Тогда аксиома (4) есть

$$(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q).$$

При $n = 3$ аксиома (4) есть

$$(p \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow q)).$$

Если $n = 4$, тогда аксиома (12) приобретает вид

$$(p \equiv \sim p) \rightarrow ((p \equiv \sim p) \rightarrow ((p \equiv \sim p) \rightarrow p)).$$

При этом достаточно рассматривать только простые числа s в аксиоме (12).

Аксиоматизация предикатной логики \mathbb{L}_n представлена в [Urquhart 1986; 2001].

Имеются различные исчисления с устранением сечения (или семантические таблицы) для \mathbb{L}_n (см. [Rousseau 1967b], [Takahashi 1967], [Carnielli 1987], [Hähnle 1993], [Baaz, Fermüller and Zach 1994], [Gil, Torrens and Verdú 1997], [Aguzzoli, Ciabattoni and Di Nola 2000]). Обратим внимание на работу [Prijetelj 1996], где предложено генценовское исчисление логик \mathbb{L}_n , в основе которого лежит ограничение структурного правила *сокращения*. Заметим, что одна из версий ограничения закона сокращения появляется уже в аксиоматизации Григолия, а у Тузьяка аксиома (4) есть в точности ограничение закона сокращения в гильбертовской форме.

5.1.7. Кардинальная степень полноты \mathbb{L}_n

У Тарского [Tarski 1930b] дается определение понятия кардинальной степени полноты логики; оно может быть переформулировано следующим образом:

Кардинальной степенью полноты логики \mathbb{L} , символически $\gamma(\mathbb{L})$, является число логик, содержащих аксиомы логики \mathbb{L} .

Вначале было установлено, что $\gamma(\mathbb{L}_3) = 3$, а также для $n-1$ — простое число:

$$\gamma(\mathbb{L}_n) = 3, \text{ если } n-1 \text{ — простое число.}$$

В общем случае теорема для произвольного n , была впервые опубликована М. Токажем [Tokarz 1974b] и упрощена в [Tokarz 1977].

Пусть $C = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Через $N_c(a_i)$, $1 \leq i \leq n$, будем обозначать число всех подпоследовательностей D из C , которые удовлетворяют следующим условиям:

- (1) $a_i \in D$ и для любого $b \in D$, $a_i \geq b$,
- (2) если $j \neq k$ и $a_j, a_k \in D$, то a_j-1 не является делителем a_k-1 .

Для любого n $c(n) = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ будет последовательностью, определяемой следующими условиями:

- (i) $a_1 = n$,
- (ii) $a_1 > \dots > a_k > 1$,
- (iii) для любого i $1 \leq i \leq k$, $a_i - 1$ есть делитель $n - 1$.

Теорема. Для конечного n кардинальная степень полноты \mathbb{L}_n есть

$$\left(\sum_{a_i \in c(n)} N_{c(n)}(a_i) \right) + 1.$$

На самом деле вычисление кардинальной степени полноты для произвольной \mathbb{L}_n возможно *только* с помощью специальной компьютерной программы, которая и была создана в 2000 г. М.Н. Рыбаковым (кафедра общей и прикладной алгебры и геометрии Тверского государственного университета). Значения для $n \leq 2000$ приведены в [Карпенко 2000, Таблица 1].

Рассмотрение значений кардинальной полноты логик Лукасевича \mathbb{L}_n представляет собой любопытную картину. Некоторые числа являются весьма «популярными», а некоторых вообще нет. Так, в десяти тысячах расширений \mathbb{L}_n из первых 100 натуральных чисел появляются следующие числа:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 20, 21,
28, 35, 36, 45, 50, 55, 56, 66, 70, 78, 84, 91.

Как видно из таблицы 1, она содержит 35 различных чисел в первой тысяче расширений \mathbb{L}_n ; во второй тысяче расширений появляется всего 11 новых чисел; в третьей тысяче — 6; в четвертой тысяче — 5; в пятой тысяче — 5; в шестой тысяче — 4; в седьмой тысяче — 5 (именно здесь появляется число 91); в восьмой тысяче — 4; в девятой тысяче — 1; в десятой тысяче — 2.

Из первых десяти тысяч логик Лукасевича \mathbb{L}_n рекордсменом является \mathbb{L}_{9241} : ее степень кардинальной полноты 2068224. Интересно, что появляющиеся «большие» числа затем неоднократно повторяются. Только что указанное число является также степенью кардинальной полноты \mathbb{L}_{10921} .

5.1.8. \mathbb{L}_n и n -значные логики Гёделя G_n

К. Гёдель [Gödel 1932] показал, что никакая конечнозначная матрица не может быть характеристической для пропозиционального интуиционистского исчисления \mathbf{H} (см. ниже раздел 8.2.2). В связи с этим им была построена следующая логическая матрица

$$\mathfrak{M}_n^G = \langle V, \bar{\cdot}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \{1\} \rangle, \text{ где}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} 1, \text{ если } x = 0 \\ 0, \text{ если } x \neq 0, \end{cases}$$

$$x \vee y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \min(x, y)$$

$$x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, \text{ если } x \leq y \\ y, \text{ если } x > y, \end{cases}$$

$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x).$$

Трехзначная логика Гёделя есть в точности трехзначная логика Гейтинга G_3 . Таким образом, конечнозначная логика G_n есть обобщение G_3 .

Логика G_n аксиоматизирована различными способами [Thomas 1962b], [Hosoi 1966], [Хомич 1986]. В [Thomas 1962b] это делается так. Берется следующая аксиоматизация бесконечнозначной логики Гёделя–Даммита LC (об этой логике см. ниже раздел 8.2.3.1):

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (((q \Rightarrow p) \Rightarrow r) \Rightarrow r)$
4. $f \Rightarrow p$
5. $(p \wedge q) \Rightarrow p$
6. $(p \wedge q) \Rightarrow q$
7. $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q)).$

Правила вывода: МР и подстановка.

Определения:

$$\text{Def. 1. } p \vee q =: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p).$$

$$\text{Def. 2. } \bar{p} =: p \Rightarrow f.$$

Искомая аксиоматизация G_n получается из приведенной замкнутой аксиомы 3 на аксиому 3_n :

$$3_n. \begin{cases} 3_0 = p_0 \\ 3_{n+1} = ((p_n \Rightarrow p_{n+1}) \Rightarrow p_0) \Rightarrow 3_n \end{cases}$$

Нетрудно показать, что операции из G_n выразимы посредством операций из L_n , т.е. G_n функционально вложима в L_n . Для этого надо определить $\neg x$ и $x \Rightarrow y$. Заметим, что $\neg x$ есть не что иное, как оператор Россера–Тюркетта $J_0(x)$. В свою очередь, Р. Чиньоли [Cignoli 1982: 10] показал, что

$$x \Rightarrow y = J_1(x \rightarrow y) \vee y.$$

В итоге операции из G_n определяются в L_n . Это позволяет строить аксиоматизацию L_n на основе интуиционистской импликации, что и было впервые сделано Р. Чиньоли [Cignoli 1982] (см. ниже).

Особый интерес представляет обобщение L_n и G_n на бесконечнозначный случай и их взаимоотношения, что будет рассмотрено в главе 8.

5.1.9. Алгебраизация L_n

Первые работы в области алгебраизации L_n принадлежат Г. Мойсилу, который задался целью построить алгебраический аппарат для n -значных логик Лукасевича, играющий ту же роль, что и булевы алгебры для классической логики. В [Moisil 1940] были построены алгебры для L_3 и L_4 , а в [Moisil 1941] (см. также [Moisil 1963a]) эти алгебры были обобщены на n -значный случай. Полученные алгебры были названы *n -значными алгебрами Лукасевича*; они представляют собой алгебру де Моргана (см. выше раздел 4.4), снабженную множеством операторов δ_i^n , которые определяются на множестве V_n следующим образом:

$$\delta_i^n x = \delta_i^n (j/n-1) = \begin{cases} 1, & \text{если } i+j \geq n \\ 0, & \text{если } i+j < n \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Заметим, что в [Suchon 1974] дается определение операторов δ_i^n в матрице Лукасевича \mathfrak{M}_n^L .

Приведем аксиоматизацию класса всех n -значных алгебр Лукасевича, принадлежащую Л. Итурриоз [Iturrioz 1977b]. В этой работе введено понятие *симметрической алгебры Гейтинга порядка n* :

$\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \sigma_1^n, \dots, \sigma_{n-1}^n, 0, 1 \rangle$ есть n -значная алгебра Лукасевича ($n \geq 2$), если $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 0, 1 \rangle$ есть симметрическая алгеб-

ра Гейтинга (см. раздел 4.4.2) и σ_i^n , $1 \leq i \leq n-1$ суть унарные операторы, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$(L1) \sigma_i^n(x \vee y) = \sigma_i^n x \vee \sigma_i^n y,$$

$$(L2) \sigma_i^n(x \Rightarrow y) = \bigwedge_{j=i}^{n-1} (\sigma_j^n x \Rightarrow \sigma_j^n y),$$

$$(L3) \sigma_i^n \sigma_j^n x = \sigma_j^n x, 1 \leq i, j \leq n-1,$$

$$(L4) \sigma_1^n x \vee x = x,$$

$$(L5) \sigma_i^n \sim x = \sim \sigma_{n-i}^n x,$$

$$(L6) \sigma_1^n x \vee \sim \sigma_1^n x = 1,$$

где $\bigwedge_{j=i}^{n-1} x_j$ стоит вместо $x_i \wedge x_{i+1} \wedge \dots \wedge x_{n-1}$.

Эквивалентный класс n -значных алгебр Лукасевича обозначим посредством \mathcal{L}_n . Приведем пример \mathcal{L}_n :

$$\mathcal{L}_n = \langle V_n, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \sigma_1^n, \dots, \sigma_{n-1}^n, 0, 1 \rangle, \text{ где}$$

$$x \vee y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \min(x, y),$$

$$\sim x = 1 - x,$$

$$x \Rightarrow y \text{ есть импликация Гёделя (см. выше 5.1.7),}$$

$$\sigma_i^n x \text{ определены выше.}$$

Поскольку

$$x \Rightarrow y = y \vee \sim \sigma_{n-1}^n x \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} (\sigma_{n-i}^n (x \wedge y) \wedge \sim \sigma_{n-i-1}^n x)^6,$$

то характеристики n -значных алгебр Лукасевича, данные Г. Мойсилом и Л. Итурриоз, эквивалентны.

⁶ Это утверждение есть обобщение Г. Мойсилом [Moisil 1965: 213] своего результата о том, что трехзначная алгебра Лукасевича есть алгебра Гейтинга [Moisil 1963a]. Исправленное доказательство приведенного утверждения дано в диссертации Р. Чиньоли [Cignoli 1970: 310]. Наиболее простое определение $x \Rightarrow y$ принадлежит Л. Итурриоз [Iturrioz 1977b]:

$$x \Rightarrow y = \bigwedge_{i=1}^{n-1} (C \sigma_i^n x \vee \sigma_i^n y), \text{ где } Cx = \neg \sigma_1^n x.$$

Свойства эквационального класса \mathcal{L}_n исследовались в [Cignoli 1970], [Balbes and Dwinger 1974], [Iturrioz 1977b; 1983] и других работах.

Очевидно, что алгебра \mathcal{L}_n есть дважды алгебра Гейтинга, поскольку $x \Leftarrow y = \sim(\sim y \Rightarrow \sim x)$. См. также [Григолия 1987: 96]. Еще один факт: алгебра \mathcal{L}_n есть алгебра Клини [Sicoe 1967]. Исторический экскурс о взаимоотношении алгебр Гейтинга и алгебр Лукасевича см. в [Cignoli 1980].

Обратим внимание, что J_i -операторы Россера–Тюркетта выражимы в n -значной алгебре Лукасевича. Установим, что $\sigma_n^n x = 1$ и $\sigma_0^n x = 0$. Тогда

$$J_i^n(x) = \sigma_{n-i}(x) \wedge \sim \sigma_{n-i-1}(x).$$

Более того,

$$\sigma_i^n(x) = \bigvee_{j=1}^i J_{n-j}^n(x), \quad 1 \leq i \leq n \text{ (см. [Cignoli 1982: 5])}.$$

Таким образом, в n -значной алгебре Лукасевича операторы σ_i^n можно заменить на операторы J_i^n .

Теперь сделаем важное замечание. А. Роуз обнаружил, что для случая $n \geq 5$ n -значная алгебра Лукасевича соответствует не n -значным логикам Лукасевича \mathbf{L}_n , а их фрагментам (см. предисловие в [Cignoli 1970]). Это значит, что посредством операций \vee, \wedge, \sim и J_i (или σ_i^n) нельзя выразить импликацию Лукасевича $x \rightarrow y$ для случая $n \geq 5$. Это же самое открытие сделал А. Тюркетт [Turquette 1969], правда, совершенно по другому поводу, а именно при обобщении трехзначной логики Лукасевича на n -значный случай.

Отсюда возникает проблема построения адекватной алгебры для n -значной логики Лукасевича \mathbf{L}_n . Тогда построенные алгебры естественно называть *алгебрами Лукасевича–Мойсила*⁷, а соответствующие им логики будем называть логиками *Лукасевича–Мойсила*, множество исходных связей которых может быть следующее: $\{\vee, \wedge, \sim, J_0, \dots, J_1\}$.

Подходящие алгебры для \mathbf{L}_n были построены Р. Григолия [Григолия 1973] (см. также [Григолия 1987, гл. 6]) как ограничение на конечнозначный случай MV -алгебр, введенных в [Chang 1958b] и являющихся алгебраической семантикой для бесконечнозначной

⁷ По существу ошибка Г. Мойсила привела к новому направлению в теории алгебраической логики. См. фундаментальную монографию [Boicescu, Filipo, Georgescu and Rudeanu 1991]. Дальнейшее значительное исследование алгебр Лукасевича–Мойсила, их категорных свойств, взаимоотношение с другими логическими алгебрами и применение в биостатистике см. в [Georgescu 2006].

логики Лукасевича \mathbb{L}_∞ (О MV -алгебрах см. ниже в разделе 8.1.1). В этих работах Р. Григолия доказал, что произвольная конечная алгебра Лукасевича (не Лукасевича–Мойсила) представима в виде прямого произведения \mathbb{L}_m -алгебр, где $m \leq n$ и $m-1$ делит $n-1$ (\mathbb{L}_m -алгебра есть матрица \mathfrak{M}_m^L).

Однако эти алгебры не основаны непосредственно на решеточной структуре.

В [Cignoli and de Gallego 1981] строится пятиэлементная алгебра для \mathbb{L}_5 , в основе которой лежит алгебра де Моргана с дополнительными условиями для новых унарных операторов⁸, а в [Cignoli 1980] (см. в особенности [Cignoli 1982]) введена собственно n -значная алгебра Лукасевича.

Пусть $S_n = \{(i, j) \in N \times N: 3 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n-4, j < i\}$, если $n > 5$, и $S_n = \emptyset$, если $n < 5$; $T_n = \{(i, j) \in N \times N: 2 \leq i \leq n-2, 1 \leq j \leq n-3, j < i\}$, если $n \geq 4$, и $T_n = \emptyset$, если $n < 4$.

Собственно n -значная алгебра Лукасевича ($n \in N, n \leq 2$) есть система

$$\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \{\sigma_i^n\}_{1 \leq i \leq n-1}, \{F_{ij}^n\}_{(i,j) \in S_n}, 0, 1 \rangle$$

такая, что

$$\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \{\sigma_i^n\}_{1 \leq i \leq n-1}, 0, 1 \rangle$$

есть n -значная алгебра Лукасевича–Мойсила \mathcal{L}_n , и $F_{ij}^n, (i, j) \in S_n$ есть бинарные операции, определенные на L и связанные с \mathcal{L}_n следующими тождествами:

$$\delta_k^n(F_{ij}^n(x, y)) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \leq i - j \\ J_i^n(x) \wedge J_j^n(y), & \text{если } k > i - j \end{cases} \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Эквациональный класс всех собственно n -значных алгебр Лукасевича обозначим посредством P_n . Очевидно, что для $2 \leq n \leq 4$, $P_n = \mathcal{L}_n$, поскольку в этом случае $S_n = \emptyset$.

Примером P_n является алгебра \mathcal{L}_n , если к ней добавим следующие операции:

$$F_{ij}^n(x, y) = F_{ij}^n\left(\frac{r}{n-1}, \frac{s}{n-1}\right) = \begin{cases} \frac{n-1-i+j}{n-1}, & \text{если } (r, s) = (i, j) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (i, j) \in S_n.$$

⁸ Трехзначная и четырехзначная алгебры Лукасевича являются частным случаем этой алгебры.

Нетрудно вычислить, что число таких операций есть $(n(n-5)+2)/2$, поскольку такова мощность множества S_n для $n \geq 5$.

Остается показать, что n -значная импликация Лукасевича $x \rightarrow y$ выражима в сигнатуре алгебры P_n :

$$x \rightarrow y = (x \Rightarrow y) \vee \sim x \vee \bigvee_{(i,j) \in T_n} F_{ij}^n(x, y) \text{ [Cignoli 1982: 8].}$$

Последняя формула опять же говорит о нетривиальности импликации Лукасевича \rightarrow .

То, что операции $F_{ij}^n(x, y)$ выражимы посредством исходных операций n -значной логики Лукасевича $\sim x$ и $x \rightarrow y$, следует из критерия Р. Мак-Нотона, тем не менее:

$$F_{ij}^n(x, y) = (x \rightarrow y) \wedge J_i^n(x) \wedge J_j^n(y).$$

В этой же работе Р. Чиньоли дает аксиоматизацию пропозициональной логики \mathbf{L}_n в сигнатуре алгебры S_n , т.е. на основе интуиционистской импликации \Rightarrow .

В заключение отметим, что изучению свойств конечнозначных логик Лукасевича \mathbf{L}_n посвящен сборник статей [Wójcicki and Malinowski (eds.), 1977]. Здесь же приведена библиография, составленная Г. Малиновским (р. 189-199).

5.2. Логика Поста P_n

По аналогии с классической двузначной логикой многозначные логики Поста P_n являются функционально полными. Этот важный факт является решающим при применении логик Поста в различных технических приложениях. Этим также объясняется исключительное развитие алгебр Поста. Особый интерес представляет взаимоотношение конечнозначных логик Поста и логик Лукасевича. Именно относительно функциональных свойств P_n будут изучаться функциональные свойства логик Лукасевича \mathbf{L}_n .

5.2.1. Матричные логики P_n

Многозначная логика строилась Постом [Post 1921] как обобщение двузначной классической логики, развитой А. Уайтхедом и Б. Расселом в «*Principia Mathematica*», где исходными логическими связками служат отрицание и дизъюнкция. В логике Поста исходными связками также являются отрицание \neg и дизъюнкция \vee , и каждая пропозициональная переменная может принимать одно из n различных значений истинности: t_1, t_2, \dots, t_n , где n — натуральное число; t_1 интерпретируется как «истина», t_n — как «ложь». Однако

мы предпочтем стандартное определение n -значной матрицы Поста \mathfrak{M}_n^P , которая задается следующим образом:

$$\mathfrak{M}_n^P = \langle V_n, \neg, \vee, \{n-1\} \rangle, \text{ где}$$

V_n есть множество $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$,

$\{n-1\}$ — множество выделенных значений.

Матричные операции определяются так:

x	$\neg x$
0	1
1	2
.	.
.	.
.	.
$n-2$	$n-1$
$n-1$	0

Отрицание Поста $\neg x$ называется *циклическим* отрицанием. Дизъюнкция $x \vee y$ определяется как в \mathfrak{L}_n :

$$x \vee y = \max(x, y).$$

Самое главное свойство многозначных логик Поста \mathbf{P}_n заключается в том, что они функционально полны, т.е. любая функция n -значной логики в них определимы. С функционально полными логиками мы уже встречались: это n -значные логики Лукасевича \mathfrak{L}_n с различными обобщениями функтора Слупецкого $T(x)$ (см. раздел 3.3.5). Как частный случай, имеем: $\mathfrak{L}_3^T = \mathbf{P}_3$.⁹ В разделе 7.3.1 мы приведем доказательство функциональной полноты \mathbf{P}_n .

5.2.1.1. Трехзначная логика Поста \mathbf{P}_3

Рассмотрим конкретный пример n -значной логики Поста, а именно \mathbf{P}_3 , где истинностные значения для удобства обозначим, как в трехзначной логике Лукасевича \mathfrak{L}_3 ; и пусть выделенным значением бу-

⁹ В книге Р.Гудстейна [Гудстейн 1961, гл. 1] рассматривается «одна трехзначная логика» с операциями \neg , $\&$, \vee , \rightarrow и утверждается, что все эти четыре операции независимы. В примечании на с. 33 А.В. Кузнецов опровергает это утверждение. На самом деле приведенные операции \neg , \vee суть не что иное, как трехзначные операции Поста, т.е. трехзначная логика Р.Гудстейна есть \mathbf{P}_3 , а следовательно, посредством \neg и \vee выразимы остальные операции.

дет 1. Тогда $x \vee y$ имеет истинностную таблицу точно такую же, как $x \vee y$ в \mathbf{L}_3 , но существенное отличие заключается в операции отрицания:

x	$\neg x$	$\neg\neg x$
1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	$\frac{1}{2}$

Заметим, что в отличие от \mathbf{L}_3 и \mathbf{G}_3 в \mathbf{P}_3 (как и во всех \mathbf{P}_n) есть операция (в данном случае циклическое отрицание \neg), которая на множестве классических истинностных значений $\{0, 1\}$ принимает отличное от них значение, например, $\neg 1 = \frac{1}{2}$. Поэтому можно указать формулу, которая является тавтологией в \mathbf{P}_3 , но не является тавтологией классической логики \mathbf{C}_2 :

$$\neg\neg\neg(x \vee (\neg x \vee \neg\neg x)).$$

Отметим также, что не всякая тавтология \mathbf{C}_2 с исходными связками отрицания и дизъюнкции является тавтологией \mathbf{P}_3 , например в \mathbf{P}_3 , как и в \mathbf{L}_3 , не имеет места закон исключенного третьего $x \vee \neg x$, но зато имеет место закон исключенного четвертого:

$$x \vee \neg x \vee \neg\neg x.$$

И вообще, в \mathbf{P}_n имеет место закон исключенного $(n+1)$ -го.

5.2.2. Алгебры Поста

Алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \sim, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-2}, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Поста порядка n , если $\langle L, \vee, \wedge, \sim, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, 0, 1 \rangle$ есть n -значная алгебра Лукасевича и e_1, \dots, e_{n-2} есть $n-2$ элемента, удовлетворяющие следующему условию (см. [Cignoli 1970: 41]):

$$(P) \sigma_{i,e_j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } i+j \geq n \\ 0, & \text{если } i+j < n. \end{cases}$$

Или, по-другому, алгебра $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, e_1, \dots, e_{n-2}, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Поста порядка n , если $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim \rangle$ есть симметрическая алгебра Гейтинга и выполняются условия (L1) – (L6) и (P).

По алгебрам Поста существует огромная литература¹⁰. Это вызвано еще и тем, что в силу их функциональной полноты они являются наилучшими кандидатами на применение в компьютерных науках; по крайней мере, они могут реализовать любую переключательную схему (выполнение одного из условий для практического использования многозначной логики в [Lee and Ajabnoor 1978: 129]).

Первая система аксиом для алгебры, соответствующей n -значной логике Поста, принадлежит П. Розенблуму [Rosenbloom 1942]. Она была упрощена Г. Эпштейном [Epstein 1960] и Т. Трачыком [Traczyk 1962]. В первой работе было показано, что алгебра Поста есть дистрибутивная решетка с псевдодополнением и к тому же обладает симметричностью, т.е. была определена операция \sim . В [Traczyk 1963] для алгебр Поста была доказана теорема типа Стоуновского представления, а в [Traczyk 1964] впервые алгебры Поста были заданы как эквациональный класс, т.е. заданы тождествами¹¹.

Здесь определение алгебры Поста дано в сигнатуре $\langle L, \vee, \wedge, C, D_1, \dots, D_{n-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, 0, 1 \rangle$, где $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка с $0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1$; $Cx = \neg D_1 x$, и операторы D_i определяются следующим образом:

$$D_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq j, \\ 0, & \text{если } i > j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1, j = 0, \dots, n-1.$$

Первым, кто обнаружил, что алгебры Поста суть также алгебры Гейтинга, был Г. Руссо [Rousseau 1969; 1970b]. Здесь определение алгебры Поста дано в сигнатуре $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, D_1, \dots, D_{n-1}, e_0, \dots, e_{n-1}, 0, 1 \rangle$, где $\langle L, \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Гейтинга и для любых x, y выполняются следующие равенства:

$$(p_1) D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(p_2) D_i(x \wedge y) = D_i(x) \wedge D_i(y), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(p_3) D_i(x \Rightarrow y) = (D_1(x) \Rightarrow D_1(y)) \wedge \dots \wedge (D_i(x) \Rightarrow D_i(y)),$$

$$i = 1, \dots, n-1,$$

$$(p_4) D_i(\neg x) = \neg D_i(x), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

¹⁰ См. хронологический обзор Ф. Двингера [Dwinger 1977], где рассмотрены также обобщения алгебр Поста. Обратим внимание на работу [Reischer and Sitovici 1987], где дана функциональная характеристика алгебр Поста.

¹¹ Это же, но по-другому, было сделано в [Мальцев 1966].

$$(p_5) D_i(D_j(x)) = D_j(x), i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$(p_6) D_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq j, \\ 0, & \text{если } i > j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1, j = 0, \dots, n-1,$$

$$(p_7) x = D_1(x) \wedge e_1 \vee \dots \vee D_{n-1}(x) \wedge e_{n-1},$$

$$(p_8) D_1(x) \vee \neg D_1(x) = 1.$$

Заметим, что класс всех алгебр Поста любого порядка $n \geq 2$ является эквационально определимым, поскольку класс всех алгебр Гейтинга является эквационально определимым (см. 4.4.2).

В [Rasiowa 1974a, ch. VII] доказывалась эквивалентность определений алгебр Поста, данная Т. Трачыком и Г. Руссо. Отсюда следует еще одно определение $x \Rightarrow y$, данное Е. Расёвой на с. 139. Здесь же развита теория алгебр Поста.

5.2.3. Аксиоматизация логик P_n

Результат Г. Руссо позволил ему дать аксиоматизацию n -значного пропозиционального исчисления Поста P_n на основе *интуиционистской импликации* и других связок. Эти идеи были развиты Е. Расёвой [Rasiowa 1974a, ch. XIV], где подробно рассматривается взаимоотношение между алгебрами Поста порядка n и n -значной пропозициональной логикой Поста P_n . См. также [Orłowska 1985].

Аксиоматизация P_n дается в сигнатуре: $\langle \vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, D_1, \dots, D_{n-1}, e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$, где $\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg$ есть в точности пропозициональные связки логики Гёделя G_n ; e_0, \dots, e_{n-1} — пропозициональные константы; D_1, \dots, D_{n-1} — одноместные связки, определяемые следующим образом:

$$D_i(e_j) = \begin{cases} e_{n-1}, & \text{если } i \leq j, \\ e_0, & \text{если } i > j, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1, j = 0, \dots, n-1.$$

Связка эквивалентности \Leftrightarrow вводится по определению:

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Тогда аксиоматизация P_n выглядит следующим образом:

(P₀) аксиомы пропозиционального интуиционистского исчисления **Int** и

$$(P_1) D_i(A \vee B) \Leftrightarrow (D_i A \vee D_i B), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(P_2) D_i(A \wedge B) \Leftrightarrow (D_i A \wedge D_i B), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$(P_3) D_i(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((... (D_i A \Rightarrow D_i B) \wedge ...) \wedge (D_i A \Rightarrow D_i B)),$$

$$i = 1, ..., n-1,$$

$$(P_4) D_i \neg A \Leftrightarrow \neg D_i A, \quad i = 1, ..., n-1,$$

$$(P_5) D_i D_j A \Leftrightarrow D_j A, \quad i, j = 1, ..., n-1,$$

$$(P_6) D_i e_j \text{ для } i \leq j \text{ и } \neg D_i e_j \text{ для } i > j, \quad i = 1, ..., n-1,$$

$$j = 0, ..., n-1,$$

$$(P_7) A \Leftrightarrow (... (D_1 A \wedge e_1) \vee ... \vee (D_{n-1} A \wedge e_{n-1})),$$

$$(P_8) D_1 A \vee \neg D_1 A.$$

Правила вывода:

$$(R1) MP,$$

$$(R2) \frac{A}{D_{n-1} A}.$$

Первопорядковые исчисления, основанные на этих пропозициональных исчислениях, изучались Е. Расёвой (см. в особенности [Rasiowa 1974b]).

Имеется ряд работ, где логики P_n строятся в виде секвенциальных исчислений генценовского типа (см., например, [Rousseau 1967b; 1970a; 1970b] и [Saloni 1972]).

Заметим, что n -значные логики Поста P_n к тому же являются исторически первыми матричными логиками с произвольным, кроме 0, числом (конечным) выделенных значений. Аксиоматизация таких логик впервые появилась в [Bolc and Borowik 1992].

Дополнительную информацию об алгебрах и логиках Поста см. в [Orłowska 1998].

Как и для любой многозначной логики возникает сложная проблема интерпретации истинностных значений, степень истинности которых пронумерована натуральными числами. Этот вопрос мы рассмотрим разделе 10.6.

5.3. Другие конечнозначные логики

Обобщения трехзначной логики Бочвара B_3 на n -значный случай, притом совершенно разные, т.е. с разными классами тавтологий, имеются у Н. Решера [Rescher 1969: 43-44] со связками $\sim, \wedge, \vee, \supset, \leftrightarrow$ и в [Бочвар и Финн 1972: 288-289] со связками \sim, J, \cap, \cup . Рассмотрим определение последних, поскольку логика B_n именно с этими связками была аксиоматизирована в [Григолия и Финн 1979]

и построена ее алгебра с доказательством теоремы представления (см. также [Finn and Grigolia 1980]).

Логическая матрица \mathfrak{M}_n^B определяется следующим образом:

$$\mathfrak{M}_n^B = \langle V_n, \sim, J_0, \dots, J_l, \cap, \cup, \{1\} \rangle, \text{ где}$$

$$V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\},$$

$$\sim x = 1 - x,$$

J_i есть операторы Россера–Тюркетта,

$$x \cap y = \max(\min(x, y), \max(\min(x, \sim x), \min(y, \sim y))),$$

$$x \cup y = \min(\max(x, y), \min(\max(x, \sim x), \max(y, \sim y))).$$

Заметим, что алгебры для V_n являются не многообразием, а только квазимногообразием [Мальцев 1970: 269]. Теорема представления для этих алгебр доказана в виде подпрямого произведения определенного вида B_m -алгебр. К тому же подчеркнем, что в основе этих алгебр лежит квазирешеточная структура.

Обобщение на n -значный случай трехзначной паранепротиворечивой логики **PCont** имеется в [Kotas and da Costa 1978]. Делается это следующим образом. К пропозициональному языку n -значной логики Лукасевича \mathbf{L}_n ($\rightarrow, \wedge, \vee, \sim$) добавляется новая унарная связка \Diamond :

$$\Diamond x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ есть выделенное значение} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $p \supset q =: \Diamond p \rightarrow q$. Пусть в матрице для \mathbf{L}_3 множество выделенных значений есть $\{1, \frac{1}{2}\}$. Тогда получаем **PCont**.

Обобщение трехзначной логики Арруды **V1** (см. выше раздел 3.5.4) имеется в [Tuziak 1997] и обобщение логики Сетте **P¹** имеется в [Fernández and Coniglio 2003].

5.4. Четырехзначные логики

В последние годы наблюдается повышенный интерес к четырехзначным логикам. В статье [Arieli and Avron 1998] очень высоко оценивается статус этих логик и им отдается предпочтение по сравнению с трехзначными логиками. Отмечается, что обычно бывает достаточно четырех истинностных значений¹². См. также [Bimbó and Dunn 2001], где предпочтение отдается четырехзначным семантикам вместо двузначной.

¹² Однако см. модели для нормальной нечеткой алгебры типа 2 в разделе 9.3.1.2.

5.4.1. Вводные замечания

Интересно, что, как и в случае с трехзначной логикой, истоки которой обнаруживаются в древнегреческой философии, начиная с Аристотеля, так и элементы четырехзначной логики можно обнаружить в классической индийской логике, представленной Санджайя, работавшем в VI в до н.э. См. [Dunn 2000: 6-7], где дается ссылка на специальную работу об этом [Raju 1954].

Несколько неожиданным оказался следующий факт, на который обратил внимание автора К.И. Бахтияров [Бахтияров 2003: 25]: «В алгебре Буля, как подчеркивал Р. Фейс на столетии его “Законов мысли”, использовалось 4 значения, причем в соответствии с правилами алгебры $1/0$ являлось бесконечным, $0/0$ неопределенным, $0/1 = 0$ ложным, $1/1 = 1$ истинным [Feys 1955: 111]».

В [Lewis and Langford 1932] при исследовании модальных логик $S1 - S5$ было выделено пять групп четырехзначных матриц, которые различались определением оператора необходимости \Box . Особый интерес представляют группы II и III. Связки импликации \supset и отрицания \neg одинаковы для всех групп матриц (см. соответственно связки \supset^+ и \neg^+ в разделе 4.3.1), а операторы \Box_{II} и \Box_{III} определяются следующим образом:

x	$\Box_{II} x$	$\Box_{III} x$
1	1	1
b	0	0
n	n	0
0	0	0

В [Zeman 1971] было доказано, что матрица со связками \supset , \neg и \Box_{II} является характеристической для модальной логики **K4** Собочиньского [Sobociński 1964], которую будем обозначать посредством **K4(S)** и которая есть $S4.4 + \Box(\Box\Diamond p \supset \Diamond\Box p)$, где $S4.4$ есть $S4 + \Diamond\Box p \supset (p \supset \Box p)$ ¹³. Модальную логику **V2**, для которой характеристической матрицей является матрица со связками \supset , \neg и \Box_{III} , мы рассмотрим в разделе 5.4.2.1.

Заметим, что из булева множества истинностных значений $\{1, 0\}$ (или $\{T, F\}$) можно двумя способами образовать четырех-

¹³ Не путать **K4(S)** со стандартной модальной логикой **K4**. О бесконечнозначных модальных логиках см. раздел 8.4.2.

элементное множество истинностных значений: 1) взять декартово произведение исходного множества; 2) образовать множество всех подмножеств исходного множества. Первый способ лежит в основе построения четырехзначной \mathbf{L} -модальной логики Лукасевича [Łukasiewicz 1953], второй первоначально связан с четырехзначной логикой Белнапа $\mathbf{DM4}$ [Belnap 1977a; 1977b].

5.4.2. \mathbf{L} -модальная логика Лукасевича

Начиная со статьи [Łukasiewicz 1953] (см. также книгу [Лукасевич 1959]), Я. Лукасевич полностью отвергает модальную логику \mathbf{L}_3 (а значит и саму \mathbf{L}_3 и вообще логики \mathbf{L}_n) и конструирует новую модальную логику, которую называет \mathbf{L} -модальной логикой. Кратко проанализируем еще одну попытку Лукасевича содержательно и формально непротиворечивым образом опровергнуть доктрину логического фатализма.

В новых работах Лукасевича нет никаких упоминаний о тех возражениях, которые были адресованы \mathbf{L}_3 . Однако обсуждение формул $p \vee \sim p$ и $\sim(p \wedge \sim p)$, которые не являются законами \mathbf{L}_3 (и никакой другой многозначной логики \mathbf{L}_n), видимо, не прошло мимо Лукасевича, о чем говорит его следующее заявление: «Я стою на той точке зрения, что в любой модальной логике должно быть сохранено классическое исчисление предложений. До сих пор это исчисление продемонстрировало свою надежность и полезность, и оно не должно быть отвергнуто без достаточно веских оснований» [Лукасевич 1959: 233]. Приняв этот общеметодологический принцип, Лукасевич формулирует следующие две проблемы, имеющие глубокое философское содержание, которые не могут быть решены средствами модальной логики \mathbf{L}_3 .

Во-первых, это принцип необходимости, на котором основывает свой фаталистический аргумент Аристотель, принимающий посылку $T(p) \rightarrow N(p)$ (см. выше раздел 2.4). Поскольку в двузначной логике любое высказывание либо истинно, либо ложно, то, указывается в [Лукасевич 1959: 216], выражение «истинно, что p » эквивалентно « p » (конвенция Тарского). В итоге получаем выражение $(p) \rightarrow N(p)$. Но, замечает далее Лукасевич, эта формула не может быть принята ни в одной логической системе, так как следствием ее является разрушение пропозициональной модальной логики. С другой стороны, если принять формализацию этого принципа в виде так называемого правила Гёделя для модальных льюисовских логик (A/NA), то получаем весьма неприятные следствия (см. в [Лукасевич 1959: 211-213]). Поэтому Лукасевич приходит к выводу, что ни одно аподиктическое высказывание, т.е. высказывание

вида $N(p)$, не может быть истинным. В этом заключается первая проблема, которую должна решить новая модальная логика.

Однако с этим надо увязать вторую проблему, которая не может быть решена в \mathbf{L}_3 и которая непосредственно связана с проблемой логического статуса высказываний о будущих случайных событиях. Лукасевич рассуждает следующим образом: «Если истина заключается в соответствии мысли с действительностью, то предложение “морское сражение состоится завтра” сегодня не истинно и не ложно... А это приводит к заключению, что на сегодня нет ни необходимости, ни возможности того, что завтра будет морское сражение, — иными словами, что предложение “Возможно, что завтра будет морское сражение” и “Возможно, что завтра не будет морского сражения” сегодня оба истинны, и это будущее событие является случайным» [Лукасевич 1959: 219-220]. Следовательно, в системе модальной логики должны быть истинными некоторые случайные высказывания. Однако средства \mathbf{L}_3 не позволяют представить конкретные виды таких случайных высказываний, что является, по мнению Лукасевича, следствием ограниченности определения в этой системе связки \Diamond . Таким образом, главной проблемой для Лукасевича является соответствующее переопределение модальной связки возможности и затем через нее определение подходящих связок необходимости и случайности.

Все эти проблемы решает четырехзначная \mathbf{L} -модальная логика Лукасевича. Беря прямое произведение матрицы классической пропозициональной логики на саму себя, Лукасевич получает матрицу $\mathfrak{M}_4^c = \langle \{1, 2, 3, 4\}, \neg^+, \vee^+, \wedge^+, \supset^+, \{1\} \rangle$, где указанные операции определяются покомпонентно (см. выше раздел 4.3.1)¹⁴. Как там подчеркивалось, она является характеристической для классической логики \mathbf{C}_2 . Таким образом, все законы классической логики, в том числе $p \vee \sim p$ и $\sim(p \wedge \sim p)$ будут иметь место в новой логике.

Поскольку теперь имеются два истинностных значения, обозначающих “возможность” (это “ b ” и “ n ”), то Лукасевич строит также два модальных оператора возможности: Mx и Wx ¹⁵ таким образом, чтобы посредством их, определив обычным образом две связки необходимости: N_1x и N_2x решить проблему истинности

¹⁴ Заметим, что покомпонентное определение операций может быть разным. См. ниже бирешетку под названием ‘*FOUR*’.

¹⁵ Специально о свойствах этих двух операторов см. в [Krolkowski 1979]. Введение «парных» видов возможности Mx и Wx Лукасевич считал важным своим открытием. Периодически в литературе появляются работы, где обсуждается это открытие Лукасевича (см., например, [Malinowski 2004]).

аподиктических высказываний. Эта проблема решается за счет того, что значения связок необходимости не равны 1:

x	Mx	Wx	N_1x	N_2x
1	1	1	b	n
b	1	b	b	0
n	n	1	0	n
0	n	b	0	0

Далее Лукасевич определяет две связки случайности и приводит примеры принимаемых формул, которые говорят о том, что в \mathbf{L} -модальной логике существуют истинные случайные высказывания. Таким образом, все поставленные проблемы решены.

Также с точки зрения чисто логико-алгебраического подхода никаких проблем не возникает. Уже Лукасевичем была высказана гипотеза об аксиоматизации этой логики. С некоторым упрощением она была осуществлена в [Smiley 1961] и стандартный вид приняла в [Lemmon 1966]. Пусть \supset есть \supset^+ (см. 4.3.1) и \Box есть N_1x . Тогда аксиоматизацией \mathbf{L} -системы является любое множество схем аксиом для классической пропозициональной логики \mathbf{C}_2 плюс следующие три:

$$\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B),$$

$$\Box A \supset A,$$

$$\Box A \supset (B \supset \Box B).$$

Единственным правилом вывода является *modus ponens*¹⁶.

В [Lemmon 1966] дано алгебраическое доказательство полноты \mathbf{L} -модальной системы, т.е. эта система строго полна относительно класса дискретных эпистемических алгебр. Дискретные эпистемические алгебры есть в точности булевы алгебры с выделенным элементом $\Box 1$, где \Box определяется следующим образом:

$$\forall x \in L, \Box x = \Box 1 \wedge x.$$

¹⁶ Другая, более простая, аксиоматизация \mathbf{L} -системы и ее свойства рассмотрены в [Крипке 1974b: 309-310]. Здесь же отмечается, что генценовские правила для оператора возможности у Х. Карри [Ситту 1952] формализуют логическую систему, которая эквивалентна \mathbf{L} -системе.

Однако \mathbf{L} -модальная логика вызвала не меньше, если даже не больше, критических замечаний, чем \mathbf{L}_3 . Опять же было указано на несоответствие формальных свойств новой модальной логики философской проблематике, поднятой Аристотелем (см., например, [Prior 1957a: 3], [Seeskin 1971: 766-770], [Haack 1974: 90]). Был обнаружен целый ряд парадоксальных, совершенно интуитивно неприемлемых модальных формул (некоторые уже озадачили самого Лукасевича), которые ставят под сомнение интерпретацию связок Mp , Wp и N_1p , N_2p как “возможно” и “необходимо” соответственно¹⁷. Также рассмотрению некоторых таких формул и следствий из них посвящена статья А.А. Ивина [Ивин 1980].

Когда всякий интерес к \mathbf{L} -модальной логике Лукасевича казался бы пропал, появилась исчерпывающая статья [Font and Hájek 2002]. Здесь рассмотрены проблемы построения крипковской семантики для этой системы и продолжены алгебраические исследования. Рассмотрены также работы, где данная система появилась независимо от Лукасевича. Интересно заключение авторов, что странности этой системы¹⁸ связаны не с построениями Лукасевича, а с модальной силлогистикой Аристотеля.

5.4.3. Решетка расширений четырехзначной классической логики \mathbf{C}_4

Итак, первоначально развитие четырехзначных логик пошло по линии расширения классической четырехзначной пропозициональной логики \mathbf{C}_4 унарными операторами. Таких операторов всего 256. Желательно было бы иметь какой-то критерий для их выбора. Например, в работе [Lemmon 1966] выделяется 15 унарных операторов, которые добавляются к \mathbf{C}_4 . Все эти 15 групп матриц называются регулярными, поскольку они верифицируют модальную аксиому \mathbf{K} : $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$. Выделенным значением является 1.

Однако имеется одно очень важное ограничение, предложенное в блестящей работе [Ермолаева и Мучник 1979]. Здесь обращается внимание на то, что модальные операторы, а также временные операторы в ряде модальных и временных логик и соответствующих алгебр выражаются с помощью эндоморфизмов в дистрибутивных решетках.

¹⁷ В [Porte 1984] вообще показывается, что \mathbf{L} -модальности совсем не являются модальностями в обычном смысле.

¹⁸ См., например, формулу $\Box p \supset (\Diamond q \equiv \Box q)$. Здесь \Diamond есть M и \equiv определяется обычным образом через импликацию и конъюнкцию.

Рассматривается четырехэлементная булева алгебра $D^2 = D \times D$ (D – булева алгебра) с одноместными функциями g , e_1 и e_2 :

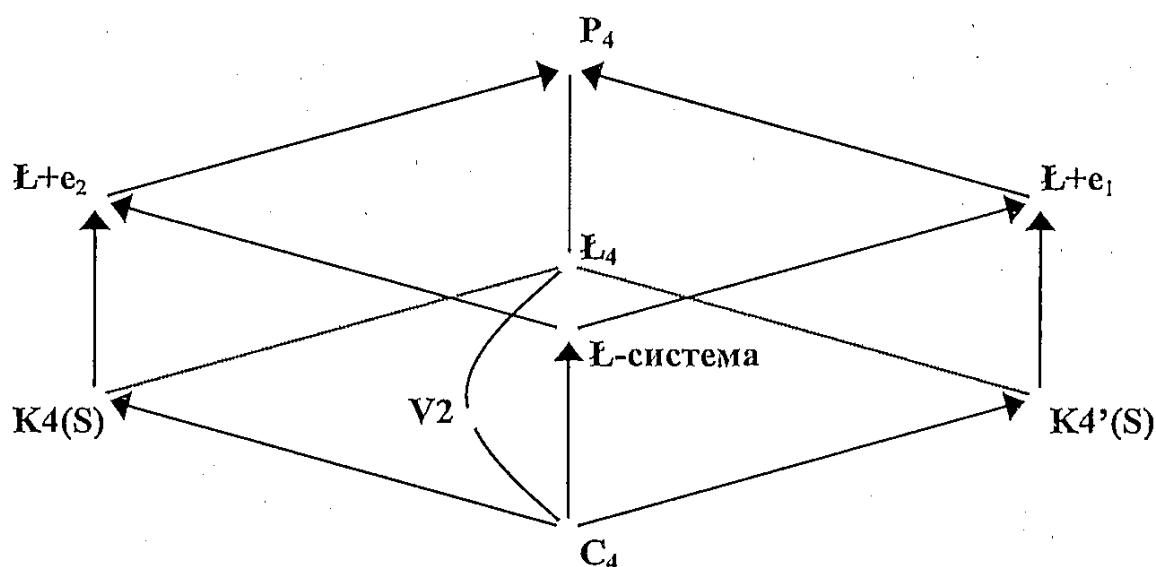
x	$g(x)$	$e_1(x)$	$e_2(x)$
1	1	1	1
b	n	0	1
n	b	1	0
0	0	0	0

В булевой алгебре D^2 эти функции являются эндоморфизмами:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$

$$f(\neg x) = \neg f(x), f(1) = 1, f(0) = 0, f(x^\sigma) = (f(x))^\sigma,^{19}$$

где f может быть любой из функций g , e_1 и e_2 . Вместе с $e_0(x) = x$ (тождественной функцией) g , e_1 и e_2 образуют моноид Q всех эндоморфизмов D^2 . Добавляются также константы b и n . В этой работе выписаны все функционально замкнутые расширения D . Приводится решетка этих классов и определены соответствующие каждому классу четырехзначные логики. Мы приведем решетку логик в наших обозначениях:



¹⁹ $x^\sigma = \begin{cases} x & \text{при } x = 1 \\ \neg x & \text{при } x = 0. \end{cases}$

Логика со связками $\{\vee, \wedge, \neg, b\}$ и $\{\vee, \wedge, \neg, n\}$ есть одна и та же \mathbf{L} -модальная логика Лукасевича (см. выше). Расширение \mathbf{C}_4 по отдельности операциями e_2 и e_1 и образует соответственно модальную логику $\mathbf{K4(S)}$ (см. выше) и $\mathbf{K4'(S)}$. Как раз с эндоморфизмом e_2 используется оператор необходимости L : $L1 = 1$, $Lb = 0$, $Ln = n$, $L0 = 0$ в работе [Zeman 1971], где, как уже отмечалось, было доказано, что матрица со связками \supset, \neg и L является характеристической для $\mathbf{K4(S)}$. Объединение двух этих логик, $\mathbf{K4(S)}$ и $\mathbf{K4'(S)}$, т.е. множество операций $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2\}$, образует четырехзначную логику Лукасевича \mathbf{L}_4 .²⁰ Новые две системы получаются посредством расширения \mathbf{L} -модальной логики Лукасевича операторами e_1 и e_2 соответственно. Множество связок $\{\vee, \wedge, \neg, e_1, e_2, b, n\}$ образует четырехзначную функционально полную логику Поста \mathbf{P}_4 . В итоге получили бы 8-элементную булеву решетку, если бы не расширение \mathbf{C}_4 операцией g , которое образует модальную логику $\mathbf{V2}$, находящуюся между \mathbf{C}_4 и \mathbf{L}_4 .²¹

5.4.3.1. Модальная логика $\mathbf{V2}$

Б. Собочинский в [Sobochiński 1964] при исследовании расширения модальной логики $\mathbf{S4}$ (см. ниже) обнаруживает следующую формулу:

$$\Box p \vee \Box(p \supset q) \vee \Box(p \supset \neg q)$$

и устанавливает, что она не выводима в $\mathbf{S5}$, но добавление ее к $\mathbf{S5}$ не превращает всю систему в классическую логику. Следуя [Meschi 1974] обозначим ее посредством β_2 . В силу результата С. Скрогга о предтабличности $\mathbf{S5}$ (см. ниже раздел 8.4.2.1) Собочинский замечает, что система $\mathbf{S5} + \beta_2$ не представляет большого интереса, поскольку является конечнозначной логикой. В [Sobochiński 1970] эта система обозначается посредством $\mathbf{V2}$, и это стало ее стандартным обозначением. Сам Собочинский занялся исследованием системы $\mathbf{V1}$ ($\mathbf{S4} + \beta_2$). Нас же как раз интересует система $\mathbf{V2}$.

²⁰ В [Ермолаева и Мучник 1979] лишь указывается, что соответствующий замкнутый класс функций, сохраняющий 0 и 1, описан в [Яблонский 1958]. В силу теоремы В.К. Финна о функциональных свойствах \mathbf{L}_n мы знаем, что четырехзначный класс этих функций соответствует четырехзначной логике Лукасевича \mathbf{L}_4 (обо всем этом см. ниже в разделе 8.1). Добавим также, что в [Гришин 1976: 264] предлагается аксиоматизация четырехзначной логики предикатов Лукасевича в виде классического исчисления секвенций с некоторыми ограничениями на правила сокращения.

²¹ Для всех этих логик разработаны нормальные формы.

В [Ермолаева и Мучник 1974] утверждается, что матрица «группы III» (см. выше раздел 5.4.1) является характеристической для модальной логики **V2**.

В логике **V2** оператор \Box имеет стандартные свойства: $\Box(1) = 1$, $\Box(b) = \Box(n) = \Box(0) = 0$ и определяется следующим образом:

$$\Box p =: p \wedge g(p) \text{ [Ермолаева и Мучник 1974: 186].}$$

$$\Diamond p =: \neg \Box \neg p.$$

В [Месхи 1974] для **V2** строится семантика Крипке. Модель $\langle M, R \rangle$, в которой $\forall x, y \in M$, либо xRy , либо yRx , будем называть *квазицепью*. Непустое подмножество M' квазицепи $\langle M, R \rangle$ назовем *слипшимся многообразием*, если $\forall x, y \in M'$, xRy и yRx . Тогда **V2** характеризуется двухэлементной квазицепью длины 1, или, иначе говоря, двухэлементным слипшимся многообразием.

Поскольку оператор g определяется в **V2**:

$$g(p) =: \Box p \vee (\neg p \wedge \Diamond p) \text{ [Ермолаева и Мучник 1976: 245],}$$

то четырехзначные логики со связками $\{\supset, \neg, \Box\}$ и $\{\supset, \neg, g\}$ функционально эквивалентны. А это значит, что логику **V2** можно развивать на основе оператора g , который будет играть особую роль в разделе 5.4.6 (см. также раздел 5.4.4.2).

5.4.4. Логика Белнапа DM4

В 1962 г. А. Андерсон и Н. Белнап предложили рассмотреть множество выводов, которые они называли «тавтологическими следствиями», или «следованиями первой степени» (*first degree entailment*). Содержательно, это множество выводов должно было включать в себя все *разумные выводы*, содержащие связки \sim, \vee, \wedge , а импликация входит только один раз и разделяет формулу на антецедент и консеквент, т.е. следованиями первой степени являются формулы вида $A \rightarrow B$, где A и B суть формулы, не содержащие вхождений связки \rightarrow . Формализация этих выводов привела к системе E_{fde} [Anderson and Belnap 1963], которая является фрагментом системы логики следования **E** и **R** (см., например, [Dunn 1986]).

Т.Дж. Смайли (в письме) нашел четырехзначную матрицу $\mathfrak{M}_{E_{fde}}$, которая является характеристической для E_{fde} (см. [Anderson and Belnap 1975: 161-162]):

$$\mathfrak{M}_{E_{fde}} = \langle \{1, b, n, 0\}, \sim, \vee, \wedge, \rightarrow \{1\} \rangle, \text{ где}$$

x	$\sim x$
1	0
b	b
n	n
0	1

\rightarrow	1	b	n	0
1	1	0	0	0
b	1	1	0	0
n	1	0	1	0
0	1	1	1	1

Операции \vee и \wedge есть в точности \vee^+ и \wedge^+ из четырехзначной \mathbf{L} -модальной логики Лукасевича.

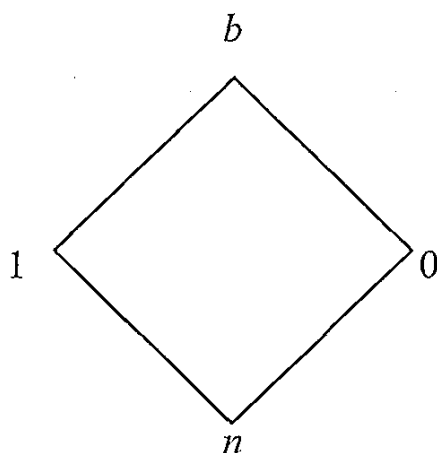
Позже Дж. Данн предложил различные семантики для тавтологических следствий, некоторые из которых были тесно связаны с четырехзначной матрицей Смайли. В [Dunn 1976] Данну принадлежит основополагающая идея, которая заключается в отождествлении четырех значений с четырьмя подмножествами булева множества $\{1, 0\}$, т.е. $\mathcal{P}\{1, 0\} = \{\{1\}, \{0\}, \emptyset, \{1, 0\}\}$.

В работах [Belnap 1977a; 1977b]²² предложена “полезная четырехзначная логика”, которая со временем вызвала необычайный интерес, особенно среди специалистов в области информатики и искусственного интеллекта. Исходная интенция Белнапа заключается в том, что компьютер должен нормально работать в условиях неполноты и/или противоречивости поступающей информации (информация может поступать из различных (возможно, независимых) источников). Белнаповский компьютер оценивает истинность высказывания в соответствии с полученной информацией. Тогда, кроме двух стандартных (классических) случаев, когда компьютеру сообщается, что высказывание является либо истинным — $\{1\}$, либо ложным — $\{0\}$, возможны еще два случая, когда источники ничего не говорят об истинности данного высказывания, т.е. возникает ситуация “истинностно-значного провала” (*gap*) — \emptyset , или же сообщается противоречивая информация, и тогда возникает ситуация “истинностно-значной пресыщенности” (*glut*) — $\{1, 0\}$. Для этих четырех “информационных ситуаций” Белнап вводит, соответственно, следующие четыре истинностных значения: T (*True*), F (*False*), N (*None*) и B (*Both*). Мы для унификации и для простоты чтения будем использовать, как и ранее, следующие истинностные значения: 1, 0, n и b .

Далее Белнап предлагает рассмотреть на множестве $\{1, 0, n, b\}$ два частичных порядка. Первый порядок естественно возникает на

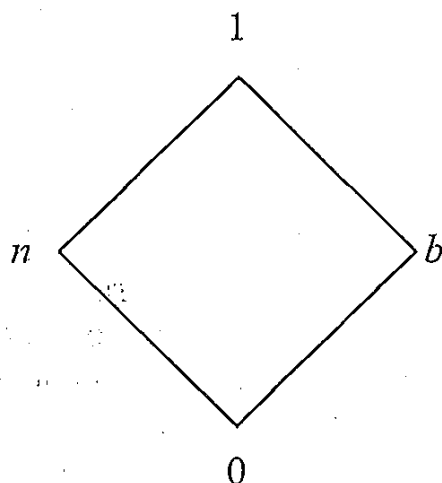
²² Имеется перевод первой работы на русский язык (см. [Белнап 1981a]) и сокращенный перевод второй работы (см. [Белнап 1981b]). Обе работы с незначительными изменениями опубликованы также в [Anderson, Belnap and Dunn 1992, § 81].

множестве $\{\{1\}, \{0\}, \emptyset, \{1, 0\}\}$ и является отношением теоретико-множественного включения \subseteq . Тогда элементы 1 и 0 находятся между n и b и являются несравнимыми. На диаграмме Хассе это выглядит следующим образом:



Очевидно, этот порядок задает полную решетку, которую Белнап, следуя Д. Скотту [Scott 1973], называет “аппроксимационной решеткой” и обозначает посредством $A4$, а сам решеточный порядок на $A4$ может быть интерпретирован как “информационный” порядок \leq_i : чем “выше” находится элемент данной решетки, тем больше информации он несет.

При другом порядке элементы n и b находятся между 1 и 0 и являются несравнимыми. Заметим, что новую упорядоченность элементов можно получить за счет поворота предыдущей решетки вправо:



Этот порядок тоже задает полную решетку, которую Белнап называет “логической решеткой” и обозначает посредством $L4$, а сам решеточный порядок на $L4$ может быть интерпретирован как “логический” порядок \leq_l : чем “выше” находится элемент данной решетки, тем больше истинности он несет. Именно логике, осно-

ванной на свойствах этой решетки, Белнап уделяет основное внимание.

Отношение \leq_i играет особую роль, поскольку именно этот порядок детерминирует работу белнаповского компьютера. Перед Белнапом стоит задача определения логических связок (решеточных операций) дизъюнкции \vee и конъюнкции \wedge . Исходя «всего лишь из трех соображений: таблиц истинности для двузначной логики, монотонности и соответствия между \wedge и \vee », Белнап (см. [Белнап 1981a: 221]) получает в точности таблицы истинности для \vee и \wedge , как в матрице Смайли для E_{fde} . В свою очередь, отрицание \sim также совпадает с отрицанием в матрице Смайли. Такое отрицание называется отрицанием Де Моргана. Логику с такими связками обозначают посредством **DM4**, поскольку ее алгебраическим примером является решетка Де Моргана (квази-булева алгебра), четырехэлементный случай которой был приведен уже в [Białynicki-Birula and Rasiowa 1957] (см. также [Rasiowa 1974a: 47]).

М. Фиттинг [Fitting 1989a] (см. также [Fitting 1992]) обратил внимание на то, что четырехзначная логика Белнапа есть не что иное, как обобщение трехзначной логики Клини K_3 . Более того, если мы посмотрим на истинностные таблицы, приведенные выше для \sim , \vee и \wedge , то увидим, что ограничения этих связок на множестве $\{1, 0, b\}$ и $\{1, 0, n\}$ в точности дают одну и ту же трехзначную логику Клини K_3 .

Белнап ничего не говорит о связке импликации и оставляет открытым вопрос о множестве выделенных значений. Заметим, что при одном выделенном значении 1, как и при двух выделенных значениях 1 и b , эта логика не имеет тавтологий. Тем не менее, порядок \leq_i позволяет ему естественно ввести отношение логического следования. Пусть v (оценка) есть отображение множества пропозициональных переменных на множество $\{1, 0, n, b\}$. Тогда имеем:

$$A \models_C B \text{ т.т.т., когда } v(A) \leq_i v(B) \text{ для всякой оценки } v.$$

Белнап предлагает компьютеру некоторый набор выводимостей, которые тот может использовать. Это отношение логического следования как раз и аксиоматизируется посредством E_{fde} .

Оказывается, это отношение логического следования эквивалентно приведенному нами для логики Клини K_3 (см. 3.4.1). Перепишем его следующим образом:

$$A \models_D B \text{ т.т.т., когда } v(A) \in D \Rightarrow v(B) \in D \text{ для всякой оценки } v.$$

Теперь это отношение определяется для **DM4** с множеством выделенных значений $\{1, b\}$ ²³. Доказательство эквивалентности см. в [Font 1997] и детально и независимым образом в [Зайцев и Шрамко 2004].

Конечно, возникает вопрос, каково отличие **DM4** от **K₃**, если первая есть обобщение второй и отношения логического следования совпадают? Тщательному изучению **DM4** посвящена статья [Font 1997] (см. добавление в [Font 1999]). Здесь представлено элегантное секвенциальное исчисление для **DM4**, его взаимоотношение с подобными исчислениями для трехзначной логики Клини **K₃** и для классической логики **C₂**. Главный результат заключается в следующем: *класс решеток Де Моргана является алгебраическим примером DM4*; точно так же, как класс булевых алгебр является алгебраическим примером **C₂**. См. также [Рупко 1999a]. Напомним, что операции матрицы для **K₃** образуют решетку Клини.

Четырехзначная логика Белнапа **DM4** оказалась очень полезной в качестве базиса для других логик. Наиболее интересны её расширения модальными операторами, эндоморфизмами на дистрибутивных решетках и, конечно, связкой импликации.

5.4.4.1. Логика **DM4** с модальными операторами

На самом деле логика де Моргана как эквивалент алгебры Де Моргана была построена уже в [Ермолаева 1973], которая исходила из работы Хао Вана [Wang 1961], где рассматривались два варианта импликации в трехзначной логике: импликация Лукасевича и импликация Клини (см. выше гл. 3).

В [Ермолаева и Мучник 1974] впервые в качестве объекта исследования изучалась логика **DM4** со стандартным модальным оператором \Box_{III} (см. выше раздел 5.4.1) и был представлен ее алгебраический эквивалент с теоремой представления. Здесь отмечается, что алгебра подобной логики возникла еще при первоначальной попытке Г. Мойсила найти короткую систему аксиом для трехзначных алгебр Лукасевича.

Специально изучению такой логики под названием **TML** (*tetravalent modal logic*) и их алгебрам (**TMA**) посвящена обстоятельная статья [Font and Rius 2000]. Здесь отмечается, что **TMA** первоначально изучались А. Монтейро под влиянием работ Л. Монтейро,

²³ Отношения логического следования для **DM4** с множествами выделенных значений $\{1\}$ и $\{1, b\}$ рассматриваются также в [Gottwald 2000: 398] и сравниваются с определением Белнапа.

посвященных доказательству независимости аксиоматизации трехэлементных алгебр Лукасевича [Monteiro L. 1963].

В [Font and Rius 2000] приводится изящная аксиоматизация ТМА. К аксиомам алгебры Де Моргана добавляются следующие две аксиомы:

$$(TM1) \Box x \wedge \sim x = 0$$

$$(TM2) \sim \Box x \wedge x = \sim x \wedge x.$$

Если к ним добавить аксиому $\Diamond(x \wedge y) = \Diamond x \wedge \Diamond y$ ($\Diamond x = \sim \Box \sim x$), то получим аксиоматизацию класса трехэлементных алгебр Лукасевича²⁴. Здесь же представлено секвенциальное исчисление логики TML (р. 496).

5.4.4.2. Логика DM4 с эндоморфизмами

Как и в случае с расширением классической логики C_4 , особый интерес представляют расширения логики Белнапа DM4 эндоморфизмами g , e_1 и e_2 (см. раздел 5.4.3). Однако здесь, в отличие от предыдущего случая, решетка логик не столь привлекательна.

Интересно, что в случае с эндоморфизмом g мы опять же получаем модальную логику V2. Это следует из того простого факта, что логики с операциями $\{\vee, \wedge, \neg, g\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, g\}$ функционально эквивалентны:

$$\sim x =: g(\neg x) \text{ и } \neg x = g(\sim x).$$

Отсюда также следует, что V2 есть расширение TML.

Другим заслуживающим внимание расширением логики DM4 является так называемая логика истинности фон Вригта.

Г.Х. фон Вригт, начиная со статьи «Истина и логика» [Wright 1984], конструирует целый ряд исчислений, отличительной чертой которых является расширение классической пропозициональной логики пропозициональным оператором истинности Т («истинно, что ...»), который играет роль модального оператора. Таким образом, понятие истины вводится в объектный язык²⁵. Как пишет фон Вригт, эта тематика заинтересовала его еще в статье «О логике отрицания» (1959).

²⁴ Последнее уже отмечается в [Ермолаева и Мучник 1974].

²⁵ Интересно, что имеется еще одна работа, которая вводит истину в объектный язык в виде оператора истинности Т (см. книгу [Koslov 1992]). При этом оператор истинности Т рассматривается как модальный оператор, выполняющий некоторые условия. Однако эти условия таковы, что оператор истинности не является истинностно-функциональным.

В статье, опубликованной на венгерском языке в журнале «*Doxa*, 5» (1985), а затем на русском языке [Вригт 1986], вводятся трехзначные и четырехзначные операторы истинности. Трехзначные операторы истинности представляют собой не что иное, как модальные операторы \Box и \Diamond из трехзначной модальной логики Лукасевича (см. выше раздел 3.1.2), но, как нам уже известно, соответствующие логики по своим функциональным свойствам есть не что иное, как трехзначная логика Лукасевича \mathbf{L}_3 , и тогда ничего нового мы не получаем, и всякий смысл оператора истинности пропадает.

В заключительной работе [Wright 1987] аксиоматизируется четырехзначная логика истинности \mathbf{T}'' (у фон Вригта – $\mathbf{T}''\mathbf{LM}$) с одним выделенным значением, которая на самом деле представляет собой расширение логики $\mathbf{DM4}$ (без ссылки на Н. Белнапа) посредством эндоморфизма e_2 (см. выше раздел 5.4.3). Эта операция как раз и обозначается посредством T . Поскольку в \mathbf{T}'' выразим стандартный оператор необходимости \Box ($\Box x =: Tx \wedge \sim(T\sim x)$), то \mathbf{T}'' можно представить как расширение модальной логики Де Моргана \mathbf{TML} (см. выше) посредством добавления оператора T . Легко показать, что в \mathbf{T}'' выразимы все $J_i(x)$ -операторы. Это значит, что используя алгоритм, предложенный в [Аншаков и Рычков 1982] (см. следующую главу), пропозициональную логику \mathbf{T}'' (как и её предикатный вариант) можно аксиоматизировать как расширение классической логики. Заметим, что если в логике \mathbf{T}'' отрицание Де Моргана \sim заменить на булево отрицание \neg , то получим модальную логику $\mathbf{K4(S)}$ (см. выше раздел 5.4.3), и тогда «логикой истинности» можно было бы считать данную логику. Отметим также, что если логику \mathbf{T}'' расширить булевым отрицанием \neg , то получим логику Лукасевича \mathbf{L}_4 . Это следует из решетки расширений \mathbf{C}_4 (см. выше).

В [Павлов 1994] (см. также [Павлов 2004]) появляется формализация четырехзначной логики ложности под названием $\mathbf{FL4}$. Исходными связками здесь являются импликация \rightarrow и оператор ложности F . Заметим, что импликация \rightarrow есть не что иное, как импликация из белнаповской логики $\mathbf{DM4}$, если возьмем стандартное определение: $x \rightarrow y =: \sim x \vee y$. Оператор ложности F (в указанных работах он обозначается посредством $\neg x$) можно определить следующим образом: $F(x) =: T(\sim x)$.

Понятно, что логика ложности $\mathbf{FL4}$ по функциональным свойствам есть не что иное, как логика истинности \mathbf{T}'' . Заметим, что \mathbf{T}'' также получается, если $\mathbf{DM4}$ расширить эндоморфизмом e_2 , поскольку эндоморфизмы e_1 и e_2 взаимовыразимы при наличии деморгановского отрицания:

$$e_1(x) =: \sim(e_2(\sim x)) \text{ и } e_2(x) =: \sim(e_1(\sim x)).$$

Заметим, что выбор оператора e_2 (или e_1) в качестве оператора истинности крайне неудачен, поскольку в силу свойств этого оператора (значениями $e_2(x)$ являются только 1 или 0) вся предполагаемая проблематика истинности и ложности сводится к двужначному случаю и становится тривиальной. Это хорошо видно из указанных работ С.А. Павлова. На самом деле главным для фон Вригта было построение паранепротиворечивой логики, в которой закон непротиворечия $\sim(T(x) \wedge T(\sim x))$ не имеет места. Этим и только этим объясняется выбор отрицания де Моргана \sim и соответствующего оператора истинности T .

В разделе 5.4.6 будет предложен оптимальный вариант четырехзначной пропозициональной «логики истинности» в связи с аристотелевской проблемой логического фатализма.

5.4.4.3. Логика DM4 с импликацией

Определение импликации $p \supset q$ как $\sim p \vee q$ в **DM4** не является адекватным, поскольку ни *modus ponens*, ни теорема дедукции не имеют в таком случае места.

Импликация Смала $A \rightarrow B$ (см. выше) обладает такими свойствами, но только на первопорядковом уровне, где A и B суть формулы, не содержащие вхождений связки \rightarrow . В [Brady 1982], исходя из свойств импликации Смала, это ограничение снимается. При этом автор обобщает свойства трехзначной импликации из **RM3** (см. выше раздел 3.5.2.1) следующим образом:

\rightarrow	1	b	n	0
1	1	0	n	0
b	1	b	n	0
n	1	n	1	n
0	1	1	1	1

На подмножестве $\{1, b, 0\}$, \rightarrow есть импликация Собочиньского из **RM3**, в то время как на подмножестве $\{1, n, 0\}$ \rightarrow есть импликация Лукасевича из **L₃**. **DM4** с данной импликацией обозначается в [Brady 1982] посредством **BN4** и выделенными значениями являются 1 и b. Здесь приводятся различные виды семантик для **BN4** и дается гильбертовская аксиоматизация с несколькими правилами

вывода. В этой логике верифицируются все аксиомы релевантной системы **R** (см. раздел 8.5.1), кроме закона сокращения.

Логика **BN4** независимым образом появляется в [Slaney 1991]. Она изучается также в [Restall 1993]²⁶ в связи с аксиомой свертывания в наивной теории множеств, где считается наиболее естественной четырехзначной логикой.

В отличие от [Brady 1982] В.М. Попов в [Попов 1989] обобщает свойства трехзначной паранепротиворечивой логики **PCont** (см. выше раздел 3.5.2) на логику **Par**. В указанной работе приводится секвенциальная и гильбертовская аксиоматизация **Par**. Последняя состоит из всех классически общезначимых формул, не содержащих отрицание \sim . А также следующие десять формул:

$$\begin{aligned} &\sim\sim p \supset p, \quad p \supset \sim\sim p, \quad \sim(p \vee q) \supset \sim p, \quad \sim(p \vee q) \supset \sim q, \\ &(\sim p \wedge \sim q) \supset \sim(p \vee q), \quad \sim(p \wedge q) \supset (\sim p \vee \sim q), \quad \sim p \supset \sim(p \wedge q), \\ &\sim q \supset \sim(p \wedge q), \quad \sim(p \supset q) \supset (p \wedge \sim q), \quad (p \wedge \sim q) \supset \sim(p \supset q). \end{aligned}$$

Правила вывода: *modus ponens* и подстановка.

В [Рунко 1999а] было отмечено, что **Par** является расширением **DM4** посредством добавления связки \supset :

\supset	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	b	n	0
n	1	1	1	1
0	1	1	1	1

Обратим внимание, что на подмножестве $\{1, b, 0\}$, \supset есть импликация \supset_1 из паранепротиворечивой логики **PCont**, в то время как на подмножестве $\{1, n, 0\}$, \supset есть импликация \rightarrow_1 , рассмотренная нами в (3.1.1). В этой работе также представлено генценовское исчисление для **Par** и показано, что алгебраической семантикой для логики **DM4** с импликацией \supset , т.е. для **Par**, является *импликативная решетка Де Моргана*.

Заметим, что такое определение четырехзначной импликации \supset в явном виде (и в связи с логикой **DM4**) впервые встречается в

²⁶ В [Restall 2000: 171-172] рассматривается как хорошо мотивированная четырехзначная логика со связками \sim , \rightarrow и \cdot . Импликация относительно \cdot является резидуалом (см. 4.4.2). Определяется она следующим образом: $p \cdot q \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$. Эта связка коммутативна и ассоциативна.

[Avron 1991a]. Более того, здесь показано, что как и трехзначные логики **RM3** и **PCont**, точно так же и четырехзначные логики **BN4** и **Par** функционально эквивалентны:

$$p \supset q =: q \vee (p \rightarrow (p \rightarrow q)),$$

$$p \rightarrow q =: (p \supset q) \wedge (\sim q \supset \sim p).$$

5.4.4.4. Бирешетки

М. Гинзберг [Ginsberg 1986; 1988] был первым, кто обобщил идеи Белнапа и рассмотрел произвольное множество с двумя частичными порядками, каждый из которых на этом множестве задает свою собственную полную решетку. Главное то, что эти две решетки существуют не сами по себе, а связаны между собой. Это обобщение можно представить следующим образом.

Пусть $\langle L_1, \leq_1 \rangle$ и $\langle L_2, \leq_2 \rangle$ есть решетки, каждая с наибольшим и наименьшим элементом. Посредством $L_1 \odot L_2$ обозначается $\langle L_1 \times L_2, \leq_l, \leq_k \rangle$, где

$$1. \quad \langle x_1, x_2 \rangle \leq_l \langle y_1, y_2 \rangle, \text{ если } \langle x_1 \leq_1 y_1 \rangle \text{ и } \langle y_2 \leq_2 x_2 \rangle;$$

$$2. \quad \langle x_1, x_2 \rangle \leq_k \langle y_1, y_2 \rangle, \text{ если } \langle x_1 \leq_1 y_1 \rangle \text{ и } \langle x_2 \leq_2 y_2 \rangle.$$

Отсюда легко дать характеристику решеточных операций в $L_1 \odot L_2$:

$$\langle x_1, x_2 \rangle \vee \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1 \vee y_1, x_2 \wedge y_2 \rangle$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \wedge \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1 \wedge y_1, x_2 \vee y_2 \rangle$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \oplus \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2 \rangle$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle \otimes \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2 \rangle$$

Такая алгебраическая структура была названа *бирешеткой* (*bi-lattice*) и основной мотивацией для Гинзберга было использование бирешеток в качестве основания в различных системах искусственного интеллекта.

Если L_1 и L_2 каждая является дистрибутивной решеткой, то $L_1 \odot L_2$ тоже дистрибутивная решетка. Более того, Гинзберг показал, что имеют место все 12 возможных дистрибутивных законов, т.е. операции взаимосвязаны между собой. Например,

$$x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z).$$

В [Ginsberg 1988] доказана *теорема представления* для бирешеток: если \mathcal{B} есть дистрибутивная бирешетка, тогда имеются дистрибутивные решетки L_1 и L_2 такие, что \mathcal{B} изоморфна $L_1 \odot L_2$.²⁷

Иногда бирешетку представляют в виде

$$\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}, \vee, \wedge, \oplus, \otimes \rangle,$$

где \mathcal{B} есть непустое множество.

Следуя Гинзбергу, на \mathcal{B} вводится регулярное отрицание \sim (здесь оно обычно обозначается посредством \neg), которое удовлетворяет следующим условиям:

1. если $x \leq_i y$, то $\sim x \geq_i \sim y$
2. если $x \leq_i y$, то $\sim x \geq_i \sim y$
3. $\sim \sim x = x$.

Специальный интерес для нас представляет следующий пример. Пусть $L_1 = L_2$ есть двухэлементная решетка $\{0, 1\}$, где $0 < 1$. Тогда $L_1 \odot L_2$ есть не что иное, как “комбинация” двух решеток $\mathbf{A4}$ и $\mathbf{L4}$, где 1 есть $\langle 1, 0 \rangle$, 0 есть $\langle 0, 1 \rangle$, b есть $\langle 1, 1 \rangle$ и n есть $\langle 0, 0 \rangle$. В итоге мы имеем наиболее простую нетривиальную бирешетку, которая обозначается посредством *FOUR*.

Целый ряд работ логического характера, связанных с бирешетками, принадлежит М. Фиттингу. В [Fitting 1989a] вводятся обозначения \oplus и \otimes для решеточных операций в решетке $\langle L, \leq_i \rangle$, которые называются соответственно ‘доверчивость’ (gullability) и ‘консенсус’ (consensus):

\oplus	1	b	n	0
1	1	b	1	b
b	b	b	b	b
n	1	b	n	0
0	b	b	0	0

\otimes	1	b	n	0
1	1	1	n	n
b	1	b	n	0
n	n	n	n	n
0	n	0	n	0

Здесь же впервые дается аксиоматизация в виде аналитических таблиц логики со множеством связок $\{\vee, \wedge, \oplus, \otimes, \sim\}$. Вводится также унарная операция ‘—’ под названием “конфляция” (conflation): $-n = b$, $-b = n$, $-1 = 1$ и $-0 = 0$. Эта операция есть не что иное, как рассмотренный выше эндоморфизм g .

²⁷ Алгебраические аспекты бирешеток исследуются в [Mobasher, Pigozzi, Slutzki and Voutsadakis 2000].

Для всех этих трех операций Фиттинг дает содержательное обоснование²⁸. В [Fitting 1990] вводится важное понятие *сплетенной* (interlaced) бирешетки: Бирешетка \mathcal{B} (с отрицанием или без него) называется *сплетенной*, если каждая из операций \vee , \wedge , \oplus , \otimes является монотонной относительно обоих порядков \leq_i и \leq_j . Это понятие является прямым обобщением клиниевского понятия *регулярности* трехзначных логических связок (см. 3.4.1). Из условия сплетенности следуют такие “странные” (см. [Белнап 1981a: 221]) свойства операций, как $b \vee n = 1$, $b \wedge n = 0$, а также $1 \vee 0 = b$, $1 \wedge 0 = n$. Фиттинг показал, что каждая дистрибутивная бирешетка является сплетенной [Fitting 1992]. Новые операции понадобились Фиттингу при разработке языка логики программирования, имеющего дело с базами распределенного знания [Fitting 1991]. Он был первым, кто осознал значимость бирешеток для семантики логики программирования. Исходя из работы [Dunn 1976], Фиттинг в [Fitting 1989a] (см., также [Fitting 1994]) представил исчисление, основанное на *FOUR*, в виде аналитических таблиц. Интересно, что во второй работе Фиттинг по аналогии с K_3 обобщил логики K_3^w и *LISP* (см. выше раздел 3.4) до дистрибутивных бирешеток в том смысле, что каждая из них является частью соответствующих бирешеток. Наконец, Фиттинг первым [Fitting 1992; 1994] исследует бирешетки с отрицанием $\sim x$ и конфляцией $-x$ (в последней работе доказывается теорема представления). Заметим также, что суммарный итог многочисленных работ Фиттинга по бирешеткам можно найти в [Fitting 2006].

Несколько слов об обобщении бирешеток. В [Lakshminathan and Sadri 1994] бирешетки расширяются третьим отношением порядка, названным “*отношением точности*”, предназначенным для эффективного рассмотрения различных степеней веры и сомнения в дедуктивных вероятностных базах данных. В [Shramko, Dunn and Takekawa 2001] (см. также [Шрамко 2002]) введено понятие *трирешетки* конструктивных истинностных значений *SIXTEEN* с дополнительным третьим частичным порядком \leq_c , упорядочивающим 16 истинностных значений по их конструктивности. В [Shramko and Wansing 2005] (см. также [Банзинг и Шрамко 2005]) вводится понятие *n-мерной мультирешетки* как структуры, на которой определены в точности n частичных порядков. В этих работах исследуется также сама 16-значная логика, соответствующая структуре *SIXTEEN*. Подчеркивается фундаментальная роль теории следования первой степени (см. выше раздел 5.4.4).

²⁸ Интересно, что несколько ранее, но совершенно из других соображений эти операции введены в [Blamey 1986].

5.4.4.4.1. Логическая бирешетка: импликация и классическое отрицание

Большой интерес представляют работы А. Ариэли и А. Аврона, в которых вводится понятие *логической бирешетки* и строятся соответствующие логики [Arieli and Avron 1994; 1996]. Здесь решается проблема выделенных значений и проблема определения подходящей импликации.

Понятие логической бирешетки в некотором смысле является обобщением понятия логической матрицы, которая, напомним, есть пара $\langle \mathcal{A}, D \rangle$, в которой \mathcal{A} есть алгебра с множеством выделенных значений D . *Логической бирешеткой* называется пара $\langle \mathcal{B}, F \rangle$, в которой \mathcal{B} есть бирешетка и F есть простой бифильтр на \mathcal{B} ²⁹.

Пусть BL есть стандартный пропозициональный язык $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes\}$ ³⁰. Оценка v есть функция, которая приписывает истинностное значение из $\langle \mathcal{B}, F \rangle$ каждой пропозициональной переменной. Любая оценка обычным образом расширяется на сложные формулы. Отношение логического следования \models вводится, как считают авторы, наиболее естественным образом (см. выше определение \models_D):

$\Gamma \models \Delta$ (где Γ, Δ есть конечные множества формул в языке $\{\vee, \wedge, \neg, \oplus, \otimes\}$) т.т.т., когда для каждой оценки v такой, что $v(A) \in F$ для каждой формулы $A \in \Gamma$, существует некоторая формула $B \in \Delta$ такая, что $v(B) \in F$.

Отношение \models имеет два важных свойства:

- а) \models не имеет тавтологий,
- б) \models является паранепротиворечивым: $p, \neg p \not\models q$.

Аксиоматизация отношения \models дается в виде элегантного генцевского исчисления под названием **GBL**. Фрагмент $\{\vee, \wedge, \sim\}$ языка **GBL** является аксиоматизацией первопорядкового следования E_{fde} . Посредством добавления соответствующих правил можно по-

²⁹ Бифильтр бирешетки $\mathcal{B} = \langle \mathcal{B}, \leq_l, \leq_k \rangle$ есть непустое подмножество $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$, $F \neq \mathcal{B}$ такое, что

$x \wedge y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ и $y \in F$,

$x \otimes y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ и $y \in F$.

Бифильтр называется простым, если также выполняются условия:

$x \vee y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ или $y \in F$,

$x \oplus y \in F$ т.т.т., когда $x \in F$ или $y \in F$.

³⁰ В этих работах рассматриваются также различные расширения языка $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes\}$, например, $BL(4)$, который есть BL , расширенный пропозициональными константами $\{1, 0, b, n\}$. Однако свойства логического следования \models во всех этих случаях остаются неизменными.

лучить из этого фрагмента генценовские исчисления для K_3 , J_3 и C_2 .

Следует отметить, что исходя из исследований М. Фиттинга бирешеток с конфляцией, в [Arieli and Avron 1996] дается следующая формулировка классической бирешетки: Бирешетка \mathcal{B} с конфляцией называется классической, если для каждого $x \in \mathcal{B}$, $x \vee \sim x = 1$. Отмечается, что обе эти операции коммутируют: $\sim \sim x = x$; в свою очередь, комбинация $\sim x$ играет роль классического отрицания \neg ($\neg n = b$, $\neg b = n$, $\neg 1 = 0$ и $\neg 0 = 1$). В этой же работе исчисление **GBL** расширяется связкой конфляции.

Важная проблема, которая здесь возникает, это расширение языка **BL** связкой импликации \supset . В силу того, что соответствующая логика **BL** не имеет тавтологий, определение $p \supset q$ как $\neg p \vee q$, как уже говорилось, не является подходящим. Авторы указывают, что единственно приемлемым способом является следующий. Пусть $\langle \mathcal{B}, F \rangle$ есть логическая бирешетка. Тогда

$$p \supset q = \begin{cases} q, & \text{если } p \in F \\ T, & \text{если } p \notin F. \end{cases}$$

Исчисление **GBL** расширяется связкой \supset :

- а) **GBL** $_{\supset}$ есть консервативное расширение **GBL**,
- б) **GBL** $_{\supset}$ является паранепротиворечивой логикой,
- с) Фрагмент $\{\vee, \wedge, \supset\}$ идентичен классической позитивной логике.

Также приводится гильбертовская аксиоматизация **BL** $_{\supset}$.

Четырехзначная импликация \supset есть не что иное как импликация из **Par**. Отмечается, что она имеет ряд недостатков. Например, $A \supset B$ и $B \supset A$ могут быть тавтологиями, но $\sim A \supset \sim B$ нет. Также имеем $n \supset 0 = 1$. Авторы предлагают два способа исправления этих недостатков. Первый заключается в том, чтобы усилить связку посредством введения “сильной” (*strong*) импликации \rightarrow . Тогда четырехзначный случай со связками \vee, \wedge, \supset и \sim есть логика **BN4** (у авторов нет ссылки на работу [Brady 1982]).

Импликация \rightarrow интересна тем, что позволяет устанавливать взаимоотношения с другими логиками. Авторы отмечают, что значимость введенного отношения \models в том, что оно может быть принято в качестве первого приближения в выводах при наличии противоречивого знания. Проблемы, которые возникают с импликацией \supset , связаны с данным определением логического следования \models , которое является монотонным. Поэтому имеет смысл

переопределить \models так, чтобы оно стало немонотонным. Здесь авторы следуют идее, взятой из [Kifer and Lozinskii 1992].

Все логические результаты, основанные на логических бирешетках, имеют также место и относительно четырехэлементной структуры *FOUR*. Такая структура в теории логических бирешеток играет ту же роль, что двухэлементная булева алгебра в теории булевых алгебр. Тогда, если \mathcal{B} в $\langle \mathcal{B}, \mathcal{F} \rangle$ есть *FOUR*, то множество $\{1, b\}$ является единственным простым фильтром. Заметим, что единственным простым фильтром на двухэлементной булевой алгебре является множество $\{1\}$.

Работа [Arieli and Avron 1998] посвящена именно изучению четырехзначной логики со связками $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, \supset\}$. Множеством выделенных значений D является множество $\{1, b\}$. Авторы отмечают, что импликация \supset в сигнатуре $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes\}$ не определима и, более того, она не определима даже, если добавим пропозициональные константы $\{1, 0, b, n\}$ (такая логика обозначается посредством $\mathbf{BL}(4)$ ³¹). Однако логика со связками $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, \supset, 1, 0, b, n\}$ уже является функционально полной. Число связок в такой логике можно свести до базисного (классического) языка $\{\sim, \vee, \supset\}$, расширенного константами b и n . Более того, число связок можно свести до четырех: $\{\sim, \oplus, \supset, n\}$.

Интересно замечание авторов, что из генценовской аксиоматизации логики со связками $\{\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, \supset, 1, 0, b, n\}$ следует, что $\{\vee, \wedge, \supset, 1, 0\}$ -фрагмент является аксиоматизацией классической логики \mathbf{C}_2 . Тогда можно представить аксиоматизацию логики со всеми этими связками как расширение \mathbf{C}_2 новыми связками, например, \sim .

Обратим внимание на весьма интересную работу [Muskens 1999]. Здесь строится четырехзначная логика предикатов \mathbf{L}_4 , основанная на бирешеточных операциях $\{\wedge, \otimes, \sim, -\}$, для которых имеет место функциональная полнота. Для \mathbf{L}_4 развивается теория моделей и доказывается аналог интерполяционной теоремы Крейга.

Очень важная, уже упоминавшаяся, алгебро-логическая работа относительно расширений $\mathbf{DM4}$ принадлежит А.П. Пынко [Pynko 1999a]. Здесь предложено 12 логик, ассоциированных с $\mathbf{DM4}$: сама $\mathbf{DM4}$, $\mathbf{DM4}$ с 1 и 0 ($\mathbf{BDM4}$), $\mathbf{DM4}$ с \oplus и \otimes ($\mathbf{D4}$), $\mathbf{D4}$ с константами

³¹ В [Avron 1999a] уточняется, что это следует из того факта, что все указанные связки являются монотонными, а связка \supset нет. Здесь же устанавливается факт о функциональной предполноте $\mathbf{BL}(4)$. Это означает, что в отличие от трехзначного случая, множество всех монотонных связок четырехзначной логики предполно. Этот же результат о функциональной предполноте $\mathbf{BL}(4)$ получен в [Pynko 1999a]. О понятии функциональной предполноты см. в разделе 7.3.3.

1, 0, b , n (BD4), BDM4 с классическим отрицанием \neg (DMB4), BD4 с \neg (B4); эти шесть логик расширяются импликацией \supset , рассмотренной нами выше. Используя им же предложенную в 1993 г. (препринт)³² теорию алгебраизуемых секвенциальных исчислений, А.П. Пылко представляет алгебраическую аксиоматизацию всех этих логик с последующей их секвенциальной аксиоматизацией. Также показывается, что логика BD4 ($\vee, \wedge, \sim, \oplus, \otimes, 1, 0, b, n$)³³ с классическим отрицанием \neg , т.е логика B4, функционально полна.

5.4.5. Другие четырехзначные логики

Интерес вызывают работы по логике аргументации с использованием аппарата современной символической логики. Исходной является статья В.К. Финна [Финн 1996], где предлагается вариант логики аргументации A_4 , истинностные значения которой 1, -1, 0, τ истолковывались соответственно как «фактически истинно», «фактически ложно», «фактически противоречиво» и «неопределенно». Семантика логики аргументации A_4 образована непустым множеством доводов (возможных аргументов и контраргументов) \mathcal{A} и функциями g^+ (аргументов *pro*) и g^- (аргументов *contra*), которые отображают множества всех пропозициональных переменных во множество подмножеств некоторого (конечного) множества \mathcal{A} аргументов. С помощью функций g^+ и g^- вычисляется оценка пропозициональных переменных. Особенностью логики аргументации A_4 является неассоциативность конъюнкции $\&$. Дана формализация логики A_4 методом аналитических таблиц Р. Смальяна. Также представлена логика предикатов A_4 . В [Финн 2007] рассмотрено три типа отношения порядка на множества истинностных значений $\{1, -1, 0, \tau\}$, в соответствии с чем строится четыре варианта четырехзначных логик аргументации.

В [Виноградов 2006a] предложен вариант логики аргументации, который отличается от исходного тем, что функции «аргументации» заданы на множестве всех пропозициональных формул, а не на множестве пропозициональных переменных. В качестве основы принимается логика Белнапа DM4. В [Виноградов 2006b] предыдущая логика аргументации расширяется связками \oplus и \otimes и импликацией \supset . Для этого языка развивается метод семантических таблиц, который является обобщением метода Фиттинга.

Среди других четырехзначных логик выделим четырехзначную паранепротиворечивую логику P_4^1 , которая является

³² Издан на английском языке в [Pynko 1999b].

³³ Выше эта логика рассматривалась под названием BL(4).

обобщением трехзначной логики Сетте P^1 (см. раздел 3.5.4). Эта логика была введена в [Carnielli and Lima-Marques 1999] и изучалась в [Fernández and Coniglio 2003] под названием P^2 . Она имеет следующую логическую матрицу:

$$\mathcal{M}_n^L = \langle \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}, \neg, \rightarrow, \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\} \rangle, \text{ где}$$

x	$\neg x$	\rightarrow	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	0	1	1	1	1	0
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	1	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1

Однако уже в [Sette and Carnielli 1995] встречается аналогичная матрица, а также на четырехзначный случай обобщается трехзначная парapolная логика I^1 .

В заключение рассмотрим еще одну четырехзначную логику, которая одновременно является и паранепротиворечивой, и парapolной, т.е. *паранормальной*. Эта логика исследуется в [Попов 2003] под названием **AVP**.

Язык \mathcal{L} логики **AVP** есть стандартно определяемый пропозициональный язык $\langle S, \&, \vee, \supset, \neg \rangle$, где S есть множество $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ всех пропозициональных переменных языка \mathcal{L} . Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\&, \vee, \supset$. Логика **AVP** [Попов 2008]) есть наименьшее множество формул, которое замкнуто относительно правила подстановки и правила МР и которому принадлежат все классические тавтологии в языке \mathcal{L} , не содержащие вхождений \neg , и для всякой формулы A , не являющейся квазиэлементарной формулой, имеют место следующие формулы:

$$\neg\neg p_1 \supset p_1, \quad p_1 \supset \neg\neg p_1,$$

$$\neg A \supset (A \supset p_1), \quad (A \supset \neg(p_1 \supset p_1)) \supset \neg A.$$

Для этой логики строится семантика обобщенных по Е.К. Войшвилло [Войшвилло 1988: 140] описаний состояния. Более того, она имеет четырехзначную характеристическую матрицу с одним выделенным значением.

Сделаем предположение, что трехзначных средств недостаточно для построения *паранормальной* логики с соответствующей теоремой адекватности.

5.4.6. «Логика истинности» Tr и фаталистический аргумент Аристотеля

Еще раз обратим внимание на то, что расширение классической четырехзначной логики C_4 и расширение логики Белнапа DM_4 оператором g в результате дает одну и ту же логику, а именно модальную логику V_2 со связками $\{\vee, \wedge, \neg, \Box\}$, которая функционально эквивалентна логикам со связками $\{\vee, \wedge, \neg, g\}$ и $\{\vee, \wedge, \sim, g\}$.

5.4.6.1. Логика Tr

Предлагается рассмотреть логику, в которой вместо оператора необходимости \Box используется оператор g , интерпретируемый как «оператор истинности» T . Такую логику обозначим посредством Tr .

В знаменитой работе А. Тарского об истине 1933 года (см. [Тарский 1999]) указаны некоторые свойства (условия) предиката «истинный», которые должна выполнять аксиоматическая теория истины³⁴. Если перевести эти и другие условия на пропозициональный случай и вместо предиката «истинный» взять оператор истинности T , то приемлемые условия для этого оператора выглядят следующим образом:

$$(I) \quad T(\neg p) \equiv \neg T(p)$$

$$(II) \quad T(p) \vee T(\neg p) - \text{закон исключенного третьего}$$

$$(III) \quad T(p) \equiv p - \text{конвенция Тарского.}$$

Если же имеется оператор ложности $F(p)$: $F(p) \equiv T(\neg p)$, то естественно, чтобы оба эти оператора коммутировали:

$$(IV) \quad TF(p) \equiv FT(p),$$

что согласуется с нормальным использованием этих понятий и позволяет естественным образом ввести отрицание: в нашем случае это $\neg p$.

$$(V) \quad \neg p \equiv TF(p).$$

Заметим, что ни одно из этих пяти условий не выполняется в логике истинности T'' (соответственно и в логике ложности FL_4),

³⁴ См. построение различных аксиоматических теорий истинности в [Halbach 2007].

где в качестве оператора истинности берется эндоморфизм e_2 (см. выше раздел 5.4.4.2)³⁵.

Однако эти вопросы решаются, если в качестве оператора истинности T возьмем эндоморфизм g . Тогда условия (I), (II), (IV) и (V) выполняются. Оператором ложности здесь является отрицание Де Моргана \sim .

Остается вопрос об аксиоматизации логики Tr и о верификации конвенции Тарского $T(p) \equiv p$.

5.4.6.1.1. Аксиоматизация логики Tr

Обратим внимание на работу [Ермолаева и Мучник 1976], где развита теория Bg -алгебр, т.е. для булевых алгебр, снабженных оператором g . Здесь доказана теорема представления для подобных структур и получен целый ряд других важных результатов³⁶. Поскольку частным случаем применения этой теории является логика Tr , то отсюда можно извлечь весьма изящную аксиоматизацию логики Tr в языке \supset, \neg и T , где $A \equiv B$ есть сокращение для $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$, а $A \wedge B$ определяется обычным образом посредством \supset и \neg . Тогда:

A0. Классическая логика (см. выше раздел 1.5).

A1. $T(A \supset B) \equiv (TA \supset TB)$

A2. $\neg TA \equiv T\neg A$.

A3. $TTA \equiv A$.

³⁵ По аналогии с тем, как Лукасевич ввел парные возможности, логику фон Вригта T'' можно также рассмотреть с парными операторами истинности T_1 и T_2 вместо эндоморфизмов e_1 и e_2 . Тогда:

(I') $T_1(\sim p) \equiv \sim T_2(p)$,

(II') $T_1(p) \vee T_2(\sim p)$,

(IV') $T_1 F_2(p) \equiv F_2 T_1(p)$.

Однако, хотя здесь операторы T_1 и F_2 коммутируют, но $T_1 F_2(p) \equiv F_2 T_1(p) \neq \sim p$.

³⁶ Заметим, что уже в [Ермолаева и Мучник 1974] вводится понятие MB -алгебр и дается их аксиоматизация — это расширение алгебры Де Моргана операцией \neg . Доказывается теорема представления для MB -алгебр. Интересно, что в [Рупко 1999а] вводится аналогичная алгебраическая структура под названием *Де Моргановская булева алгебра* в сигнатуре $\langle \vee, \wedge, \sim, \neg, 1, 0 \rangle$, где $\langle \vee, \wedge, \sim \rangle$ -редукт есть решетка Де Моргана, а $\langle \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle$ -редукт есть булева алгебра. Соответствующая четырехзначная логика в виде секвенциального исчисления обозначается посредством **DMB4**.

Правила вывода: MP^{37} .

Сделаем также несколько неожиданное предположение:

Логика $Tr(V2)$ является **ЕДИНСТВЕННЫМ** нормальным расширением модальной логики $S5$ (кроме самой $S5$, C_2 и противоречивой логики), которая обладает интерполяционным свойством Крейга! (Об этом свойстве см. в разделе 8.5.2).

Эту логику и можно было бы считать искомой пропозициональной «логикой истинности». В связи с этим сделаем следующее замечание.

5.4.6.2. Логика Tr и аксиоматические теории истины

Никакого отношения к аксиоматическим теориям истины все это не имеет и поэтому неудивительно, что работы фон Вригта о логиках истинности не вызвали какого-либо интереса. Аксиоматизация теории истины Тарского происходит на совершенно другом уровне (см. [Halbach 2007]) с привлечением, как минимум, аппарата первостепенной арифметики.

Добавим также, что применение многозначных логик в исследовании свойств предиката истины использует не только расширенное пространство истинностных значений, но и свойства структур, которые это пространство образует. Пионерской работой здесь является статья С. Крипке [Kripke 1975] и независимо от него работа Р. Мартина и П. Вудруфа [Martin and Woodruff 1975]. В этих работах введен подход, основанный на “неподвижных точках”, позволяющий предложению, которое ссылается само на себя, не принимать никакого классического истинностного значения или принимать “неопределенное” истинностное значение. Подходящим инструментом здесь оказалась трехзначная логика Клини K_3 и в особенности тот факт, что её связки монотонны (регулярны). Поэтому трехзначная логика Лукасевича L_3 здесь никак не применима. Подход Крипке получил большую известность и даже стал *альтернативным* по отношению к теории истины Тарского (см. книгу [Soames 1998]). Теория истины Крипке была расширена на четырехзначный случай в работах [Visser 1984] и [Woodruff 1984], где теперь предложение может принимать одновременно оба клас-

³⁷ Интересно, что в [Хавьер Санчес 1978] дана аксиоматизация (без доказательства) логики, которая есть расширение C_2 посредством добавления отрицания де Моргана \sim . Предложена семантика в терминах описания состояний в духе Карнапа. Поскольку \neg и \sim коммутируют, т.е. $g(p) = \neg(\sim p) = \sim(\neg p)$, то эта логика есть не что иное, как Tr . См. также [Bochman 1998].

сических истинностных значения. Существенно то, что четырехзначный подход позволяет работать с полными *решетками*, а не с полными *полурешетками*, что намного упрощает технический аппарат. Но что более важно, четырехзначный подход имеет естественное обобщение до семейства сплетенных бирешеток (см. выше), обогащенных операцией конфляции $g(x)$. Введение кванторов предполагает четырехзначное пространство (см. [Fitting 1989b]).

Другое дело, что логика **Tr** может служить *пропозициональным базисом* для новой *аксиоматической теории истины*, но не более того.

5.4.6.3. Конвенция Тарского и логический фатализм

Классическая операция эквиваленции \equiv такова, что формула $T(p) \equiv p$ в логике **Tr** не имеет места.

Поэтому введем новую операцию эквиваленции \equiv_1 . Определим импликацию \rightarrow_1 следующим образом:

$$p \rightarrow_1 q =: \neg(\Box p) \vee q,$$

где, напомним, $\Box p =: p \wedge T(p)$.

Приведем табличное определение $p \rightarrow_1 q$:

\rightarrow_1	1	b	n	0
1	1	b	n	0
b	1	1	1	1
n	1	1	1	1
0	1	1	1	1

Для этой импликации имеет место стандартная форма теоремы дедукции.

Искомая операция эквиваленции \equiv_1 определяется так:

$$p \equiv_1 q = (p \rightarrow_1 q) \wedge (q \rightarrow_1 p).$$

В этом случае конвенция Тарского $\text{Tr} \equiv_1 p$ имеет место.

Как следствие определения импликации $p \rightarrow_1 q$ получаем, что *аристотелевский принцип необходимости* $\text{Tr} \rightarrow_1 \Box p$ здесь также верифицируем.

Отсюда верификация конвенции Тарского в виде пропозициональной формулы $\text{Tr} \equiv_1 p$ непосредственно ведет к тому, что фата-

листический аргумент Аристотеля сохраняет свою силу, несмотря на введение в логику дополнительных истинностных значений. А это означает, что отбрасывание принципа бивалентности в общем случае не ведет к опровержению аристотелевского фаталистического аргумента (см. раздел 2.4). Таким образом, весьма распространенное мнение, что многозначная логика может быть использована против логического фатализма, несостоятельно.

Интересен также вопрос об аксиоматизации логики Tr с дополнительной связкой \equiv_1 . Предполагаемый вариант: замена в аксиоматизации Tr связки \equiv на \equiv_1 (с предварительным её аксиоматическим заданием). Тогда аксиома (A3) редуцируется в аксиому (A3'): $\text{Tr} \equiv_1 p$.

6. АКСИОМАТИЗАЦИЯ КОНЕЧНОЗНАЧНЫХ ЛОГИК

6.1. Предыстория

Появление и развитие матричных n -значных логик Лукасевича и Поста поставили вопрос об их аксиоматизации, а затем возникла проблема аксиоматизации произвольной конечнозначной логики. По крайней мере, тривиальной аксиоматизацией является весь класс общезначимых формул данной матричной логики. Тогда возникает следующая проблема: можно ли для этого бесконечного класса формул найти конечный базис? Таким образом, по аналогии с классической логикой встал вопрос о доказательстве теоремы адекватности. Мы уже приводили отдельные примеры аксиоматизации конечнозначных логик. Теперь подойдем к этому вопросу систематически.

Первые работы в этой области дают примеры гильбертовских исчислений тех или иных многозначных логик. Как уже говорилось, трехзначная логика Лукасевича \mathcal{L}_3 была аксиоматизирована М. Вайсбергом [*Wajsberg* 1931] (см. выше раздел 3.1). Однако совсем не ясно, как этот способ аксиоматизации распространить на произвольное конечное число n . Правда, ему же принадлежит аксиоматизация произвольной \mathcal{L}_n для случая, когда $n-1$ есть простое число (доказательство не опубликовано). Как отмечается в [*Łukasiewicz and Tarski* 1930: 142], расширение этого результата на произвольное конечное n принадлежит А. Линденбауму (доказательство не опубликовано). Позже М. Вайсбергом [*Wajsberg* 1935] был предложен общий метод аксиоматизации широкого класса конечнозначных логик, куда входят также все n -значные логики Лукасевича. Однако согласно этому методу должно выполняться следующее ограничение: каждая конечная нормальная матрица (напомним, матрица является нормальной, если она верифицирует правило МР) может быть аксиоматизирована, если в ней общезначимы следующие формулы:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(q \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p),$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p),$$

$$\neg q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg p).$$

Метод, предложенный Вайсбергом, является весьма громоздким и практически мало пригоден. Еще одно ограничение состоит в том, что предлагаются методы аксиоматизации *только* функционально полных многозначных логик (см. [Sobociński 1936] и [Szyrpecki 1939b]).

Другой метод гильбертовской аксиоматизации был разработан Дж. Россером и А. Тюркеттом [Rosser and Turquette 1952]¹ и включает в себя в качестве исходного условия общезначимость следующих импликативных формул:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)),$$

$$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q).$$

Кроме этого, здесь впервые было указано на обязательное наличие в аксиоматизируемой логике J_I -операторов:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$$

Все эти условия выполняют, например, конечнозначные логики Лукасевича. Этот метод имеет место также для произвольного числа выделенных значений и распространяется на предикатные многозначные логики. Подробно данный метод аксиоматизации на пропозициональном и предикатном уровнях рассмотрен в [Gottwald 2001, ch. 6].

Главным недостатком этого метода является то, что он содержит существенные ограничения на класс аксиоматизируемых n -значных логик.

6.2. Другие методы аксиоматизации

Статья К. Шрётера [Schröter 1955] является первой работой, в которой предлагается метод аксиоматизации произвольных конечнозначных логик без ограничений Россера–Тюркетта. Этот метод является распространением генценовских секвенциальных исчислений на системы конечнозначных логик. С различными модифика-

¹ См. также [Williamson 1976].

циями секвенциальные построения были осуществлены в [Rousseau 1967b] и [Baaz, Fermüller, Salzer and Zach 1998]. См. также [Takahashi 1967; 1968] и [Baaz, Fermüller and Zach 1994]². В обзоре [Avron 2003] рассмотрены классические генценовские методы для пропозициональных многозначных логик (трехзначные логики, четырехзначные логики, n -значная логика Гёделя G_n , некоторые бесконечнозначные логики). В этих системах используются двусторонние секвенции, они допускают устранимость сечения и обладают свойством подформульности.

В последнее время большое развитие получили логические системы в виде *гиперсеквенций*. Подобные системы являются обобщением генценовских секвенциальных систем и оказались подходящими для многих неклассических логик.

Гиперсеквенции являются мультимножествами секвенций (сами секвенции называются “компонентами”)

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mid \dots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n,$$

где оператор \mid есть дизъюнкция на метауровне. Гиперсеквенция истинна в некоторой интерпретации, если, по крайней мере, одна из компонент истинна в этой интерпретации. Это обобщение позволяет таким системам использовать одно правило вместо многократного использования правил.

Впервые для конечнозначных логик гиперсеквенции были использованы А. Авроном [Avron 1991b]. См. также [Avron 1999b]. Особенно они оказались удобными для аксиоматизации бесконечнозначных логик (см. окончание гл. 9).

После книги Р. Смульяна [Smullyan 1968] представление исчислений в виде аналитических таблиц стало особенно популярным и в скором времени было применено к многозначным логикам. По-видимому, первой работой здесь является статья С. Сурмы [Surma 1974]. Значительное упрощение и усиление результатов С. Сурмы см. в [Carnielli 1987; 1991]. См. также книгу [Hähnle 1993].

Применение метода секвенциальных исчислений и аналитических таблиц к аксиоматизации многозначных логик рассмотрено

² Здесь следует также упомянуть простой метод аксиоматизации для пропозициональных логик, предложенный В.М. Поповым [Попов 1979]. При этом необходимым условием является наличие одноместных функций $I_k(x)$, определяемых на множестве $\{1, \dots, n\}$ ($n \geq 2$), с единственным выделенным значением j :

$$I_k(x) = \begin{cases} j, & \text{если } x = k \\ x, & \text{если } x \neq k \end{cases} \quad (1 \leq k \leq n).$$

также в [Gottwald 2000, ch. 7]. В [Hähnle and Escalada-Imaz 1997] содержится тщательный обзор различных теоретико-доказательных методов, в том числе и для бесконечнозначных логик. Продолжением является работа [Baaz, Fermüller and Salzer 2001], на которую следует обратить особое внимание. Кроме всего прочего, здесь предлагается классификация различных видов систем дедукции, дается характеристика конечнозначных логик средствами классической логики предикатов, отдельно рассматривается класс конечнозначных предикатных логик.

В [Комендантский 2003] исследуется теория вывода, основанная на теореме представления для алгебр истинностных значений многозначных логик, а также построено исчисление резолюций для всего класса конечнозначных логик поста P_n .

6.3. Метод Аншакова-Рычкова

В заключение мы обсудим один весьма примечательный метод аксиоматизации конечнозначных логик. В целом ряде работ О.М. Аншаков и С.В. Рычков [Аншаков и Рычков 1982; 1984а; 1984b] предложили простой алгоритм аксиоматизации конечнозначных логик, в том числе и произвольных. В основе лежит идея В.К. Финна, использованная им при аксиоматизации трехзначной логики Бочвара B_3 [Финн 1974] и обобщенная на n -значный случай B_n в [Григолиа и Финн 1979], которая заключается в том, что при аксиоматизации применяются два вида переменных: “внутренние” и “внешние”. При этом внешние переменные оцениваются классическим множеством истинностных значений $\{1, 0\}$. Тогда главной особенностью метода Аншакова-Рычкова является то, что предложенная гильбертовская аксиоматизация конечнозначных логик представляет собой расширение аксиом классической (первопорядковой) логики.

6.3.1. Предварительные замечания

Рассмотрим класс n -значных логик L_n сигнатуры

$$\sigma = \langle \{J^*_\alpha \mid \alpha \in V_n\}, \neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^* \rangle,$$

где $V_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ — множество истинностных значений.

Эти логики задаются операциями на множестве истинностных значений V_n , причем выполняются следующие условия:

(1) Алгебра $\langle V_n; \vee^*, \wedge^* \rangle$ является квазирешеткой (см. 4.4),

(2) Наличие всех J_α^* -операторов (см. выше),

(3) Ограничения операций $\neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^*$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно.

Отметим, что наличие в сигнатуре всех J -операторов J_α^* , $\alpha \in V_n$ интуитивно означает возможность для любого $\alpha \in V_n$ на языке логики L_n говорить о том, что некоторое предложение A этой логики принимает данное истинностное значение α . Отсутствие какого-либо из J -операторов J_β^* , $\beta \in V_n$, соответственно, означало бы невозможность делать на языке данной логики утверждения типа: «предложение A принимает истинностное значение β ». Например, если мы имеем трехзначную логику с истинностными значениями «истина» (1), «ложь» (0) и «бессмыслица» ($1/2$), и $J_{1/2}$ -оператор был бы невыразим в нашей логике, то мы не смогли бы на языке этой логики высказать утверждение о «бессмысленности» какого-либо предложения.

Отметим, что все результаты будут иметь место для значительно более широкого класса логик, а именно для таких логик, в которых функционально выразима сигнатура

$$\sigma = \langle \{J_\alpha^* \mid \alpha \in V_n\}, \neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^* \rangle,$$

удовлетворяющая указанным выше условиям (1), (2), (3).

Логики, в которых выразимы все J_α -операторы, называются *истинностно-полными логиками*. А истинностно-полные логики, в которых выразимы операции $\neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^*$, ограничения которых на подмножество $\{0, 1\}$ совпадают с классическими логическими связками, называются *истинностно-полными S -расширяющими логиками*, потому что, говоря неформально, они содержат на множестве $\{0, 1\}$ классическую логику S_2 , т.е. L_n совпадает с S_2 на множестве $\{0, 1\}$. В этом смысле так определенный класс конечнозначных логик «похож» на классическую логику. Отметим, что в класс истинностно-полных S -расширяющих логик, удовлетворяющих условию квазирешеточности, попадают все конечнозначные логики Лукасевича, логики, соответствующие алгебрам Лукасевича–Мойсила, трехзначная логика Бочвара и ее обобщения, класс трехзначных логик значения из работы [Финн, Анишаков, Григолия и Забейсайло 1980], n -значные логики Поста, логика истинности фон Вригта T'' , максимально предполные логики T_n (см. раздел 7.3.3.2.1) и многие другие конечнозначные логики.

Условие квазирешеточности возникает здесь не случайно и связано со свойством логики быть *хорошо кванторизуемой*. Кванторы всеобщности и существования здесь определяются как обобщенные конъюнкция и дизъюнкция соответственно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы конъюнкция и дизъюнкция зависели только от множества значений своих компонент и, следовательно, не зависели бы ни от расстановки скобок, ни от порядка членов, ни от количества одинаковых компонент. Таким образом, как для конъюнкции, так и для дизъюнкции должны иметь место законы ассоциативности, коммутативности и идемпотентности, т.е. множество истинностных значений относительно этих операций образует квазирешетку. Выполнение этого условия и делает логику *хорошо кванторизуемой*.

Заметим, что понятие многозначного квантора введено в [Rosser and Turquette 1952, ch. IV], хотя уже неявно появилось в [Mostowski 1948].

6.3.2. Аксиоматизация

Рассмотрим гильбертовское исчисление предикатов для конечно-значных логик из работы [Аншаков и Рычков 1982].

6.3.2.1. Синтаксис

Алфавит:

- 1) Предметные переменные $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
- 2) Функциональные буквы $f_1^{(0)}, \dots, f_n^{(k_n)}, \dots$
- 3) Предикатные буквы $p_1^{(n_1)}, \dots, p_n^{(r_n)}, \dots$
- 4) Связки $\neg, \wedge, \vee, \supset, J_\alpha$ ($\alpha \in V$).
- 5) Кванторы \forall, \exists .
- 5) Скобки $), ($.

Определение 1.

а) Каждая константа (функциональный символ вида $f_i^{(0)}$) и каждая предметная переменная есть терм.

б) Если t_1, \dots, t_n — термы, а $f_i^{(n)}$ — n -арная функциональная буква, то $f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — тоже терм.

Определение 2.

а) Если t_1, \dots, t_n — термы, то $p_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ — атомарная формула.

б) Если A и B — формулы, а x — предметная переменная, то формулами будут и выражения $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$, $(\exists x B)$, $(\forall x A)$, $(J_\alpha A)$.

Свободные и связанные вхождения переменных определяются обычным образом. Используются также обычные соглашения об опускании скобок. Кроме того, J_α по силе связывания приравнивается к отрицанию \neg .

Определение 3.

а) Если A — формула, то $J_\alpha A$ — внешняя формула.

б) Если X и Y — внешние формулы, то внешними формулами будут и выражения $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \supset Y)$, $(\neg X)$, $(\exists x X)$, $(\forall x X)$.

В дальнейшем будем использовать буквы A, B, C, \dots как метаварьируемые для формул, а буквы X, Y, Z, \dots — как метаварьируемые для внешних формул.

Система аксиом:

I. Пропозициональные аксиомы связи (P) (см. 1.4)

$$P1. X \supset (Y \supset X),$$

$$P2. (X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z)),$$

$$P3. X \supset (Y \supset X \wedge Y),$$

$$P4. X \wedge Y \supset X,$$

$$P5. X \wedge Y \supset Y,$$

$$P6. (X \supset Z) \supset ((Y \supset Z) \supset (X \vee Y \supset Z)),$$

$$P7. X \supset X \vee Y,$$

$$P8. Y \supset X \vee Y,$$

$$P9. (X \supset Y) \supset ((X \supset \neg Y) \supset \neg X),$$

$$P10. \neg \neg X \supset X.$$

Определение 4.

Будем говорить, что терм t допустим для подстановки в формулу A вместо переменной x , если ни одно свободное вхождение

переменной x не находится в области действия кванторов по переменным, входящим в t . Запись $A(t/x)$ означает формулу, полученную из A в результате подстановки t вместо x во всех свободных вхождениях, причем при этом подразумевается, что t допустим для подстановки в A вместо x .

II. Кванторные аксиомы (Q)

$$Q1. \forall x X \supset X(t/x),$$

$$Q2. X(t/x) \supset \exists x X,$$

где t — произвольный терм, допустимый для подстановки в X вместо x .

Определение 5.

$$A \equiv B =: (A \supset B) \wedge (B \supset A).$$

Аксиомы связи (A).

Будем использовать малые греческие буквы как переменные для элементов множества истинностных значений V_n .

$$A1. J_1 X \equiv X,$$

$$A2. J_\alpha J_\beta A \supset X \wedge \neg X \quad (0 < \alpha < 1),$$

$$A3. J_0 J_\alpha A \equiv \neg J_\alpha A,$$

$$A4. J_\alpha A \bigwedge_{\beta \neq \alpha} \neg J_\beta A,$$

$$A5. J_\alpha (A \wedge B) \equiv \bigvee_{\beta \wedge^* \gamma = \alpha} (J_\beta A \wedge J_\gamma B),$$

$$A6. J_\alpha (A \vee B) \equiv \bigvee_{\beta \vee^* \gamma = \alpha} (J_\beta A \wedge J_\gamma B),$$

$$A7. J_\alpha (A \supset B) \equiv \bigvee_{\beta \supset^* \gamma = \alpha} (J_\beta A \wedge J_\gamma B),$$

$$A8. J_\alpha \neg A \equiv \bigvee_{\neg^* \beta = \alpha} J_\beta A.$$

Примечание 1.

Сокращающие символы $\bigwedge_{l \in I} A_l$, $\bigvee_{l \in I} A_l$ понимаются как $A_1 \wedge (A_2 \wedge \dots (A_{k-1} \wedge A_k) \dots)$ и $A_1 \vee (A_2 \vee \dots (A_{k-1} \vee A_k) \dots)$ соответственно при ус-

ловии, что $I = \{1, \dots, k\}$. Если же $I \neq \emptyset$, то через $\bigwedge_{i \in I} A_i$ обозначается формула $X \vee \neg X$, а через $\bigvee_{i \in I} A_i$ обозначается формула $X \wedge \neg X$, где X — произвольно выбранная внешняя формула. Что касается бинарных операций \wedge^* и \vee^* , то в силу коммутативности, ассоциативности и идемпотентности запись $\bigwedge_{\beta \in I} \beta$, $\bigvee_{\beta \in I} \beta$ имеет смысл, причем $\bigwedge_{\beta \in I} \beta = 1$ и $\bigvee_{\beta \in I} \beta = 0$ при $I = \emptyset$.

Определение 6.

Через $Con \alpha$ обозначим множество $\{C \subseteq V_n \mid \bigwedge_{\beta \in C} \beta = \alpha\}$.

Через $Dis \alpha$ обозначим множество $\{D \subseteq V_n \mid \bigvee_{\beta \in D} \beta = \alpha\}$.

Кванторные аксиомы связи (QA)

$$QA1. J_\alpha \forall x A \equiv \bigvee_{C \in Con \alpha} ((\forall x \bigvee_{\beta \in C} J_\beta A) \wedge (\bigwedge_{\beta \in C} \exists x J_\beta A)),$$

$$2. J_\alpha \exists x A \equiv \bigvee_{D \in Dis \alpha} ((\forall x \bigvee_{\beta \in D} J_\beta A) \wedge (\bigwedge_{\beta \in D} \exists x J_\beta A)).$$

Правила вывода:

$$1. \text{ Modus ponens: } \frac{Y, Y \supset X}{X},$$

где здесь и далее X и Y — внешние формулы.

$$2. J_1\text{-введение: } \frac{A}{J_1 A}.$$

$$3. J_1\text{-удаление: } \frac{J_1 A}{A}.$$

$$4. \exists\text{-введение: } \frac{X \supset Y}{\exists x X \supset Y}, \text{ где } x \text{ не входит свободно в } Y.$$

$$5. \forall\text{-введение: } \frac{X \supset Y}{X \supset \forall x Y}, \text{ где } x \text{ не входит свободно в } X.$$

Определение доказательства стандартное.

Теорема дедукции.

Пусть Γ — совокупность формул, а X — внешняя замкнутая формула. Тогда $\Gamma, X \vdash A$ влечет $\Gamma \vdash X \supset J_1 A$.

6.3.2.2. Семантика

1.0. *Определение.* L_{n+1} -структурой, связанной с языком L_{n+1} , назовем тройку $L = \langle D, \{F_i^k\}_{k \in N, i \in J}, \{P_j^m\}_{m \in N, j \in K} \rangle$, где $D \neq \emptyset$, F_i^k — отображение D^k в D , P_j^m — отображение D^m в V , и тип L_{n+1} -структуры $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ (где $\tau_1: J \rightarrow N$ и $\tau_2: K \rightarrow N$, и $\tau_1(i)$ — арность операции F_i , $\tau_2(j)$ — арность $(n+1)$ -значного предиката P_j) совпадает с типом языка L_{n+1} .

1.1. Пусть I — интерпретация языка L_{n+1} в L , т.е. I — функция, определенная на $F \cup P$ (где F — множество пропозициональных букв и P — множество предикатных букв языка L_{n+1}), такая, что $If_i^{(k)} = F_i^k$ и $Ip_j^{(m)} = P_j^m$. Пусть также v^* — произвольное отображение из множества X всех предметных переменных языка L_{n+1} в множество D .

Определим по индукции оценку v , заданную функцией $v^*: X \rightarrow D$

$$1.2. (a) \quad vf_i^{(0)} = If_i^{(0)} = F_i^{(0)}, vx_i = v^*x_i,$$

$$(b) \quad vf_i^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = F_i^{(k)}(vt_1, \dots, vt_k).$$

$$1.3. (a) \quad vp_i^{(k)}(t_1, \dots, t_k) = P_i^{(k)}(vt_1, \dots, vt_k),$$

$$(b) \quad v(A \wedge B) = vA \wedge_* vB,$$

$$v(A \vee B) = vA \vee_* vB,$$

$$v(A \supset B) = vA \supset_* vB$$

$$v(\neg A) = \neg_* vA$$

$$v(J_\alpha A) = J_\alpha^* vA \quad (\alpha \in V)$$

$$(c) \quad \text{пусть } v|_{x \rightarrow a} \text{ — оценка, порожденная}$$

функцией $v^*_{|x \rightarrow a|}$ такой, что

$$v^*_{|x \rightarrow a|} y = \begin{cases} v^* y, & \text{если } x \neq y \\ a, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Положим

$$v \forall x A = \bigwedge_{\beta \in \{ \beta \in V \mid (\exists a \in D)(v_{|x \rightarrow a|} A = \beta) \}} \beta$$

$$v \exists x A = \bigvee_{\beta \in \{ \beta \in V \mid (\exists a \in D)(v_{|x \rightarrow a|} A = \beta) \}} \beta$$

1.4. *Определение.* Формулу A языка L_{n+1} назовем истинной (выполненной) на L_{n+1} -структуре L при оценке v , если $vA = 1 \in V$.

1.5. *Определение.* Формулу A языка L_{n+1} назовем истинной (выполненной) на L_{n+1} -структуре L , если $vA = 1$ для любой оценки v в этой структуре.

1.6. *Определение.* Формулу A языка L_{n+1} назовем L_{n+1} -выполнимой, если найдется L_{n+1} -структура L , такая, что A истинна на L .

1.7. *Определение.* Формулу A языка L_{n+1} назовем L_{n+1} -общезначимой, если для любой L_{n+1} -структуры L формула A истинна на L .

1.8. *Теорема о корректности.* Все формулы, выводимые в L_{n+1} , являются L_{n+1} -общезначимыми.

Доказательство. Достаточно проверить общезначимость аксиом и то, что правила вывода сохраняют общезначимость.

Далее строится секвенциальное исчисление, эквивалентное данному, и доказывается теорема о полноте.

6.3.3. Обобщение и другие вопросы

Изложенный здесь метод может быть применен для более широкого класса логик (см. [Аншаков и Рычков 1984b]), а именно для логик с сигнатурой

$$\delta_1 = \langle F_1, \dots, F_k \rangle,$$

через которую выражима сигнатура

$$\sigma = \langle \{J^*_\alpha \mid \alpha \in V_n\}, \neg^*, \vee^*, \wedge^*, \supset^* \rangle,$$

удовлетворяющая указанным выше условиям (1), (2), (3), и теперь для удобства рассматриваются логики сигнатуры $\delta_2 = \delta \cup \delta_1$. Тогда операциям F_1, \dots, F_k поставим в соответствие логические связи f_1, \dots, f_k подходящей местности.

При построении исчисления предикатов L_n на базе нашей конечнозначной логики, при определении формул и термов нужно добавить в индукционный шаг случаи, отвечающие связкам f_1, \dots, f_k . Также в определении оценки добавляются случаи:

$$\nu f_j^r(A_1, \dots, A_r) = F_j(\nu A_1, \dots, \nu A_r) \quad (j=1, \dots, k).$$

Общезначимость определяется как и ранее.

Логику L_n можно аксиоматизировать следующим образом: к группе аксиом связи (A) добавляются следующие схемы аксиом

$$J_\alpha f_i(A_1, \dots, A_r) \equiv \bigvee_{F_j(\beta_1, \dots, \beta_r) = \alpha} (J_{\beta_1} A_1, \dots, J_{\beta_r} A_r)$$

$$(j=1, \dots, k, \alpha \in V).$$

Таким образом, имеется общий эффективный способ построения предикатных исчислений (гильбертовских, а также и секвенциальных), полных относительно L_n -общезначимости, на базе истинностно-полных S -расширяющих логик с условием квазирешеточности. Более того, с незначительными изменениями эти результаты имеют место относительно L_n -общезначимости с произвольным числом выделенных значений $D \subset V_n$ таким, что $0 \notin D$ и $1 \in D$.

В случае же произвольных конечнозначных логик их язык, т.е. сигнатура δ_2 , расширяется конечным числом «метасимволов», т.е. вводятся добавочные «внешние» связи, которым соответствуют либо операции на множестве $\{0, 1\}$, либо J -операторы, вообще говоря, не выражимые через исходные логические операции. (Имеются также и внешние кванторы.) Полученные в результате применения данного способа исчисления с такой нестандартной семантикой называются исчислениями *квазигильбертовского типа* и *квазисеквенциальными исчислениями*. По своим дедуктивным свойствам они близки к обычным исчислениям гильбертовского типа и секвенциальным исчислениям. Это позволяет стандартным образом развивать для них теорию моделей и теорию доказательств.

Как отмечают авторы, возможность в общем виде развивать теорию моделей для произвольных конечнозначных логик обусловлена не только дедуктивными свойствами исчислений, но и в не меньшей степени введением в данной работе общего понятия

ультрапроизведения L_n -структур. В указанной работе доказываются аналоги теоремы Лоса об ультрапроизведениях и теоремы Мальцева о компактности.

В [Anshakov and Rychkov 1994] были рассмотрены алгебраические проблемы, связанные с истинностно-полными S -расширяющими логиками L_n . Показано, что каждой такой логике соответствует некоторый класс алгебр, играющий для L_n ту же роль, что играет класс булевых алгебр для классической логики S_2 . Доказана теорема представления для L_n -алгебр и предложено новое доказательство полноты для пропозициональных истинностно-полных S -расширяющих логик. В [Ambas 2001] показано, что данные логики алгебраизуемы в смысле [Blok and Pigozzi 1989] и для них доказана строгая теорема полноты.

В [Anshakov, Finn and Skvortsov 1989] рассмотрено обобщение истинностно-полных S -расширяющих логик, названное авторами J -определимыми J -компактными логиками, которые могут и не быть конечнозначными. Именно бесконечнозначные J -определимые J -компактные логики используются для формализации правдоподобных рассуждений в ДСМ-методе автоматического порождения гипотез. В [Аншаков 1998] рассматривается алгебраическая проблематика, связанная с такими логиками. Автор переносит результаты из [Anshakov and Rychkov 1994] на класс подобных логик.

6.4. Некоторые размышления

В итоге мы имеем несколько необычный взгляд на суть n -значных логик: каждая конечнозначная логика (предикатная) есть расширение классической логики. Такую аксиоматизацию назовем S -аксиоматизацией. Последнее как раз и позволяет дать единый метод (алгоритм) аксиоматизации конечнозначных логик и доказать целый ряд известных теоретико-модельных теорем, являющихся аналогами теорем для классической логики предикатов.

Конечно, такая унификация всего класса конечнозначных логик имеет свои издержки и главная из них та, что скрываются весьма существенные отличительные черты каждой из них. Например, трехзначная логика Лукасевича L_3 (и соответственно все ее обобщения L_n) является к тому же исторически первой логикой без сокращения, т.е. добавление к L_3 формулы

$$(p \supset (p \supset q)) \supset (p \supset q)$$

приводит к классической двузначной логике S_2 .

Характерен случай с паранепротиворечивыми логиками и их трехзначными вариантами, которые заведомо строились с целью фальсифицировать формулы

$$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \text{ или } (p \wedge \neg p) \rightarrow q.$$

Как мы видели, паранепротиворечивая логика J_3 (см. 3.5.3) аксиоматизирована как расширение C_2 . Поскольку в изложенном методе аксиоматизации каждая конечнозначная логика L_n есть расширение C_2 , то все эти формулы уже содержатся в исходных аксиомах (или выводимы из них). Более того, если L_n не является истинностно-полной C -расширяющей логикой, то это не значит, что она может быть аксиоматизируема *только* в виде квази-гильбертовского исчисления. Например, в логиках Гёделя G_n (см. 5.1.7) не выразимы J -операторы, т.е. эти логики не являются истинностно-полными. Тем не менее, как отмечалось, они имеют простую гильбертовскую аксиоматизацию.

Также обратим внимание на явную связь истинностно-полных логик с наличием в них нормального изоморфа C_2 (см. 3.3.1.1). Это как раз и позволяет представить аксиоматизацию истинностно-полных C -расширяющих логик как расширение C_2 . Таким образом, наличие изоморфа является достаточным основанием для C -аксиоматизации широкого класса конечнозначных логик. При этом заметим, что при построении изоморфа нет необходимости использовать все J -операторы. Это наводит на мысль расширить метод Аншакова–Рычкова на те конечнозначные логики, в которых не выразимы все J -операторы, но наличие изоморфа гарантируется.

Итак, по заданной конечной матрице можно построить если не гильбертово, то квази-гильбертово исчисление. Возникает следующий естественный вопрос: можно ли по каждой конечной матрице построить конечную *гильбертову* аксиоматизацию? Ответ отрицателен. В качестве предположения это было высказано в [Аншаков и Рычков 1984а: 492]. В пользу такого ответа говорят следующие результаты.

В. Раутенберг [Rautenberg 1981] доказал, что *содержание* любой двузначной матрицы, т.е. $E(\mathcal{M}_2)$, конечно аксиоматизируемо, и в связи с этим спрашивает, имеет ли это место для любой конечной матрицы. П. Вуйтылак [Wojtylak 1984] опровергает возможность этого, сконструировав пятизначную матрицу с двумя выделенными значениями, которая не является конечно аксиоматизируемой. Затем В. Дзёбьяк [Dziobiak 1991] находит четырехзначную матрицу с одним выделенным значением с тем же самым свойством и ставит вопрос о существовании подобной матрицы среди трехзначных.

Наконец, К. Палашиньска [Palasińska 1992; 1994], представила две 3-значные матрицы с одним выделенным значением, в которых операция присоединения следствий не является конечно-аксиоматизируемой. Одна из них имеет следующий вид:

$$\mathfrak{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \otimes, \{2\} \rangle,$$

где $x \otimes y$ принимает всюду значение 2, кроме случая $2 \otimes 0 = 1$.

7. МНОГОЗНАЧНАЯ ЛОГИКА КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА

В силу прикладного характера многозначной пропозициональной логики главным становится не изучение многозначной логики как логического исчисления (класса аксиоматизируемых тавтологий) и не изучение свойств алгебраических тождеств, что все вместе представляет сугубо теоретический интерес, а изучение функциональных свойств моделей логики высказываний.

7.1. Формульная модель n -значной логики

Модели многозначной логики строятся по аналогии с двузначной логикой, как это было видно на примере с n -значной логикой Лукасевича \mathcal{L}_n . Так, индивидуальные высказывания логики, разбитые на классы, с одним и тем же значением истинности, приводят к понятию множества V_n — константы модели, которые заменяют индивидуальные высказывания их соответствующими значениями истинности; переменные высказывания приводят к переменным величинам x_1, x_2, \dots , которые в качестве значений принимают элементы из множества V_n ; логические связки приводят к множеству f_1, \dots, f_k элементарных функций (операций). Напомним, что в n -значной логике Лукасевича \mathcal{L}_n этими функциями являются отрицание \sim и импликация \rightarrow .

7.1.1. Понятие функции n -значной логики. Элементарные функции

В моделях многозначной логики понятие функции является основным и наряду с булевыми функциями (функциями двузначной логики) используется для описания дискретных устройств, компоненты которых могут находиться в некотором числе различных состояний. Произвольная функция $f(x_1, \dots, x_m)$ от любого конечного числа переменных, областью определения которых и областью значения самой функции является множество V_n (без ограничения общности можно считать, что его элементами являются $0, 1, 2, \dots, n-1$), называется n -значной функцией или функцией n -значной логики. Таким образом, если $f(x_1, \dots, x_m)$ — функция от m переменных, то f отображает множество V_n^m во множество V_n , где m обозначает

m -ную декартову степень множества V_n , $m \geq 1$. В случае $V_n = \{0, 1\}$ имеем дело с *булевыми функциями*. Имеются различные способы задания функций. Например, функция $f(x_1, \dots, x_m)$ может быть задана таблицей, где в некотором порядке перечислены все n -ичные наборы длины m (из элементов $0, 1, 2, \dots, n-1$) и на каждом из них указано значение функции, как это делалось в двузначной логике.

Число n -ичных наборов длины m равно n^m и на каждом из них значение функции можно задать n способами. Поэтому число функций n -значной логики, зависящих от аргументов x_1, \dots, x_m , составляет n^m . Множество всех функций n -значной логики обозначим посредством P_n .¹ Случай $n > 2$ оказывается существенно более сложным, чем классический случай P_2 . Уже в P_3 число функций от двух переменных равно 19 683, в то время как в P_2 таких функций всего 16. Естественнo в P_n возникают трудности как в возможности эффективного использования табличного задания функций, так и в возможности просмотра всех функций от m переменных. Поэтому вместо табличного задания функций часто употребляется задание при помощи алгоритма вычислимости функций. Например, $\max(x_1, \dots, x_m)$ можно рассматривать как алгоритм, который для любого набора значений переменных выдает их *максимум*.

Как и в двузначном случае, в P_n выделяются функции, которые наиболее часто употребляются в логике и в вычислительных устройствах и играют там важную роль. Такие функции называются *элементарными*. Приведем некоторые из них.

1. Константы $0, 1, 2, \dots, n-1$.

2. *Отрицание Лукасевича*: $\sim x = n-1-x$ — обобщение отрицания в смысле «зеркального отрицания».

3. *Отрицание Поста*: $-x = x+1 \pmod n$ — обобщение отрицания в смысле «циклического сдвига значений».

4. $J_i(x) = \begin{cases} n-1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i. \end{cases}$ — обобщение некоторых свойств

отрицания, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

5. Функция $\min(x, y)$ — обобщение конъюнкции. Функция $\min(x, y)$ обозначается также $x \wedge y$, или $x \& y$.

6. Функция $xy \pmod n$ — второе обобщение конъюнкции.

В отличие от названий логических систем, которые обозначаются нами полужирным шрифтом, названия множества функций, соответствующих данным логическим системам, будем обозначать курсивом.

7. Функция $\max(x, y)$ — обобщение дизъюнкции. Функция $\max(x, y)$ обозначается также $x \vee y$.

8. Функция $x + y \pmod n$ — обобщение суммы по $\text{mod } 2$.

9. Импликация Лукасевича:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} n-1, & \text{если } x \leq y, \\ (n-1) - x + y, & \text{если } x > y \end{cases} \quad - \text{ обобщение}$$

одного из свойств классической импликации.

10. Функция Вебба: $W_n(x, y) = \max(x, y) + 1 \pmod n$ — обобщение стрелки Пирса [Webb 1935; 1936].

Из этого списка элементарных функций видно, что функции двузначной логики имеют в n -значной логике ($n \geq 3$) по несколько аналогов, каждый из которых обобщает соответствующее свойство данной булевой функции.

Заметим, что не для всех обобщений булевых функций сохраняются соответствующие классические свойства. Например, $\sim(\sim x) = x$, но $\neg(\neg x) \neq x$ (при $n \geq 3$).

7.1.2. Формулы как суперпозиция элементарных функций

Кроме двух рассмотренных способов задания функций не менее известным способом является формула, которая строится из элементарных функций. Пусть F — некоторое непустое множество n -значных функций. По индукции определим понятие формулы над F .

- а) Базис индукции. Каждая функция $f(x_1, \dots, x_m)$ из F называется *формулой над F* .
- б) Индуктивный переход. Пусть $f_i(x_1, \dots, x_m)$ — функция из F и A_1, \dots, A_m — выражения, являющиеся либо формулами над F , либо символами переменных (аргументов). Тогда выражение $f_i(A_1, \dots, A_m)$ называется *формулой над F* .

Заметим, что при образовании новых формул вместо переменных исходных функций можно подставлять как формулы, так и переменные.

Так как мы можем определить значение формулы A (опираясь на индуктивное определение формул) на любом наборе переменных, то тем самым мы сопоставим этой формуле некоторую функцию $f(x_1, \dots, x_m)$, т.е. по формуле, вычисляя ее на всех n^m наборах,

можно восстановить таблицу функции. Про функцию, сопоставленную формуле, говорят, что она *реализуется* этой формулой.

В отличие от табличного задания, реализация (представление) данной функции формулой не единственно. Например, в двузначной логике штрих Шеффера $x|y$ можно представить формулами $\neg x \vee \neg y$ и $\neg(x \wedge y)$.

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются *эквивалентными* или *равносильными*. Эквивалентность формул обозначается знаком равенства, поэтому можно записать $x|y = \neg x \vee \neg y = \neg(x \wedge y)$.

Опираясь на понятие эквивалентности, можно описать основные свойства элементарных функций. Как и в классической логике, функции $x \wedge y$ и $x \vee y$ обладают свойствами ассоциативности, коммутативности, идемпотентности и дистрибутивности относительно друг друга. Ниже мы покажем, что посредством функций $x \vee y$, $x \wedge y$, $J_1(x)$ и констант любую функцию $f(x_1, \dots, x_m)$ из P_n можно представить в так называемой *первой форме*, являющейся аналогом совершенной д.н.ф. для функций алгебры логики (см. 1.3).

Если функция f реализуется формулой, которая составлена только из символов функций f_1, \dots, f_k (а также символов переменных), то говорят, что функция f является *суперпозицией* функций f_1, \dots, f_k , а процесс получения функции f из f_1, \dots, f_k называют *операцией суперпозиции* [Яблонский 1958].

Например, из элементарных функций $\sim x$ и $x \vee y$ посредством их суперпозиции можно получить формулы $\sim x \vee y$, $x \vee x$, $x \vee (x \vee \sim y)$, и т. д. Таким образом, формулой является выражение, описывающее суперпозицию элементарных функций.

В итоге задание конкретной модели многозначной логики состоит в указании множества истинностных значений V_n , множества элементарных функций F и множества функций, полученных посредством суперпозиции над F и реализуемых формулами. Эта модель называется *формульной моделью*, а также *n-значной логикой* (см. [Кудрявцев 1982]). В кибернетике такие модели рассматриваются как управляющие системы. Элементарные функции при этом являются элементами, производящими определенные операции, а формулы интерпретируются как схемы, построенные из элементов и осуществляющие переработку входной информации в выходную. Характерными задачами для формульной модели являются: задача об указании всех формул, реализующих заданную константу; задача об эквивалентных преобразованиях; задача о сложности реализации; задача о минимизации и т. д.

7.2. Алгебра функций

Однако в зависимости от того, какие цели преследуются при изучении многозначной логики, по-разному понимается, что собой представляет ее модель. Для многих специалистов, связанных с вычислительной техникой, инженеров, прикладных математиков и физиков гораздо большее значение имеет представление модели многозначной логики в виде *функциональной системы*. В отличие от универсальной алгебры, где носителем может служить множество произвольной природы, в теории функциональных систем носитель должен быть множеством функций, в то время как операции над этими функциями могут быть неалгебраического характера. Основные проблемы, стоящие перед теорией функциональных систем были сформулированы в докладе С.В. Яблонского [Яблонский 1978]. Некоторые итоги подведены в работе В.Б. Кудрявцева [Кудрявцев 1981], а также в [Марченков 2004].

Нас будут интересовать те функциональные системы, которые базируются на функциях многозначной логики с операцией суперпозиции, т.е. под функциональной системой мы будем понимать пару (P_n, C) , где P_n есть множество всех функций n -значной логики² с заданной на нем операцией суперпозиции C . Наиболее яркие достижения в этой области относятся к двум взаимосвязанным темам: построение и анализ порождающих множеств и проблема полноты. Классические работы здесь принадлежат Э. Посту, А.В. Кузнецову, С.В. Яблонскому, В.К. Финну, И. Розенбергу. Тщательное изложение всех основных результатов, начиная со статьи Э. Поста [Post 1920], содержится в фундаментальной монографии [Lau 2006], которая значителен как базовый курс по конечнозначной логике.

7.2.1. Оператор замыкания, замкнутые классы и базисы

Операция суперпозиции порождает на P_n оператор замыкания. Пусть $F \subseteq P_n$. Тогда, следуя А.В. Кузнецову (см. [Кузнецов 1959]), множество всех функций, которые можно получить с помощью операции суперпозиции из F , называется *замыканием* F и обозначается посредством $[F]$. Таким образом, оператор замыкания определяется на множестве всех подмножеств n -значных функций и ставит в соответствие каждому множеству F замыкание множества F , состоящее из всех функций, которые выразимы формулами, составленными из функций множества F .

² Иногда рассматривается множество всех функций счетнозначной логики P_ω .

Оператор $[]$ обладает следующими свойствами (F, F_1, F_2 — произвольные множества n -значных функций):

- (i) $F \subseteq [F]$ (рефлексивность),
- (ii) $[[F]] = [F]$ (идемпотентность),
- (iii) $F_1 \subseteq F_2$ влечет $[F_1] \subseteq [F_2]$ (монотонность),
- (iv) Если система F_1 является полной и $F_1 \subseteq [F_2]$, то и система F_2 является полной.

Все эти утверждения следуют из определения оператора замыкания. Утверждение (iv) позволяет устанавливать полноту некоторой системы, выражая с её помощью все функции другой системы, полнота которой уже установлена.

Множество F n -значных функций называется (функционально) *замкнутым множеством (классом)*, если оно совпадает со своим замыканием, т.е. если $F = [F]$.

Примеры.

1. Класс $F = P_n$, очевидно, является замкнутым классом.
2. Класс функций от одной переменной, очевидно, является замкнутым классом.
3. Класс функций от двух переменных не является замкнутым классом, поскольку $x \vee y \vee z$ функция от трех переменных, является суперпозицией дизъюнкции $x \vee y$.

Говорят, что множество функций замкнуто относительно операции суперпозиции, если любая суперпозиция функций из данного множества тоже входит в это множество. Таким образом, замкнутость класса функций F означает собой сохранение при суперпозиции «наследственных» свойств этих функций. Пример (3) как раз показывает, что свойство быть функцией от двух переменных не сохраняется при суперпозиции.

Пусть F — замкнутый класс и $F_1 \subseteq F$. Говорят, что множество функций F_1 порождает замкнутый класс F (или что F порождается множеством функций F_1), если $[F_1] = F$. Если F_1 порождает класс F , то говорят также, что F_1 *полно* в классе F . В случае, когда замкнутый класс F порождается конечным множеством функций, класс F называют *конечно порожденным*. Множество функций F_1 называется *базисом* замкнутого класса F , если F_1 порождает F и $[F_2] \neq F$ для любого подмножества F_2 множества F_1 , отличного от F_1 , т.е. базисом является минимальная полная независимая система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной.

Хорошо известным примером полных в P_2 систем функций (использующихся при построении СДНФ и полинома Жегалкина) являются $\{\wedge, \vee, \neg\}$ и $\{\wedge, \oplus, 1\}$. Первая не является базисом P_2 , а вторая является таковым. В свою очередь, система $\{\oplus, 1\}$ является базисом класса линейных функций (см. ниже). Число функций, входящих в базис, называется *рангом* базиса.

Базис является *минимальным*, если при любом отождествлении переменных у всякой функции базиса получается неполная система. В [Шестопал 1961] доказано, что в P_2 имеется конечное число различных минимальных базисов и это число равно 48.

Заметим, что в ряде задач изучаются только соответствия между F и $[F]$. Тем самым фактически переходят к изучению оператора замыкания, который определяется посредством суперпозиций функций, а сама функциональная система (P_n, C) зачастую отождествляется с многозначной логикой, т.е. (P_n, C) выступает в качестве модели многозначной логики. Эта модель, в отличие от рассмотренных выше алгебр истинностных значений, является *алгеброй функций*³.

³ Следуя А.И. Мальцеву [Мальцев 1966] (см. также [Марченков 2000]), существует чисто алгебраический способ определения понятий суперпозиции, замыкания и замкнутого класса. Введем следующие элементарные алгебраические операции: ς , τ , Δ , ∇ , $*$.

ς и τ суть одноместные операции циклической перестановки переменных и транспозиции первых двух переменных. Если f — m -местная функция и $k \geq 2$, то m -местные функции ςf и τf определяются соотношениями

$$(\varsigma f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = f(x_2, x_3, \dots, x_m, x_1),$$

$$(\tau f)(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_m).$$

Δ есть одноместная операция отождествления первых двух переменных:

$$(\Delta f)(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}).$$

∇ есть одноместная операция введения (первой) фиктивной переменной:

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = f(x_2, \dots, x_{m+1}).$$

Наконец, $*$ есть двуместная операция подстановки. Если f — m -местная, а g — k -местная функции, то $f * g$ является $(k+m-1)$ -местной функцией, которая определяется тождеством

$$(f * g)(x_1, \dots, x_{k+m-1}) = f(g(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}).$$

Алгебра $\langle P_n; \varsigma, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ называется (полной) *итеративной алгеброй функций* [Lau 2006: 31]. В случае, когда носителем является множество булевых функций P_2 , алгебра называется *итеративной алгеброй Поста* (см. также [Мальцев 1976]). Функция $f \in P_n$ называется суперпозицией над $F \subseteq (P_n)$, если f может быть получена посредством применения конечного числа операций ς , τ , Δ , ∇ , $*$ к функциям из F . Множество всех суперпозиций над $F \subseteq (P_n)$ называется замыканием F . Поэтому всякая подалгебра итеративной алгебры $\langle P_n; \varsigma, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ является замкнутым классом.

Известна содержательная трактовка понятия функциональной системы $((P_n, C))$ является частным случаем таковой), в основе которой лежит рассмотрение таких пар (P, Ω) , в которых P является множеством отображений, реализуемых управляющими системами из некоторого класса, а Ω состоит из операции, используемой при построении новых управляющих систем из заданных. В нашем случае Ω представляет собой операцию суперпозиции C .

7.2.1.1. Классы Поста

Наиболее сложной задачей, можно сказать, глобальной задачей для многозначной логики является описание решетки замкнутых классов данной модели многозначной логики. В [Post 1921] установлено, что мощность множества замкнутых классов в P_2 счётна, и только через двадцать лет в [Post 1941] доказывается *Большая теорема Поста*, где дается полное описание решетки замкнутых классов, каждый класс строится эффективно и показано, что каждый замкнутый класс имеет конечный базис. Эти классы названы *классами Поста*. Их около 50, включая несколько бесконечных регулярных семейств. Из этих результатов следуют решения задач о выразимости, полноте (*Малая теорема Поста*), базисах и др. Так, максимальный ранг базиса не превышает 4, например, $\{x \wedge y, 0, 1, x \oplus y \oplus z\}$.

Эта работа сыграла основополагающую роль в дальнейшем изучении функциональных свойств многозначных логик. Доказательство Поста громоздко и довольно-таки сложно. В [Яблонский, Гаврилов и Кудрявцев 1966] результаты Поста излагаются в более доступной форме. Эта книга сыграла огромную роль в отечественной литературе, на многие годы определив характер исследований по замкнутым классам булевых функций. В 80-е годы появляется целый ряд новых доказательств, например, алгебраическое доказательство в [Bertan 1980] и компактное доказательство в [Угольников 1988]. Последнее доказательство несколько модифицировано в [Марченков 2000]. Элементарное доказательство приводится в [Lau 2006].

7.3. Проблема функциональной полноты

Труднейшей проблемой при изучении функциональных систем является следующая: какие функции могут быть сконструированы из данного множества функций. Проблема эта возникает и в самом пропозициональном исчислении, представленном формульной

моделью, и в синтезе автоматов, и в универсальной алгебре; но именно при рассмотрении многозначной логики как функциональной системы этой проблеме уделяется специальное внимание⁴. Заметим, что в [Емельянов 1985] показано, что в n -значной логике для любого фиксированного $n > 2$ задача о выразимости функции посредством операции суперпозиции через функции определенной системы является NP трудной задачей, т.е. для её решения не существует полиномиальных алгоритмов.

Важнейшим свойством функциональной системы является свойство функциональной полноты (например, для того, чтобы можно было реализовать любую переключательную схему). Система функций $F = \{f_1, \dots, f_k, \dots\}$ из P_n называется функционально полной, если любая функция из P_n представима посредством суперпозиций функций из системы F . Или, в терминах замыкания: F — полная система, если $[F] = P_n$.

Таким образом, указанная выше проблема приобретает здесь следующий вид: является ли некоторое множество F функционально полным?

7.3.1. Примеры функционально полных систем

Приведем три конкретных примера функционально полных систем.

- Система Россера и Тюркетта
 $F = \{0, 1, \dots, n-1, J_0(x), J_{n-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$
 является полной в P_n (см. [Яблонский 1958], [Гиндикин 1972], [Лупанов 2007]). Здесь и в остальных примерах будем исходить из последней работы.

Доказательство. Для функций n -значной логики имеет место представление, которое является аналогом совершенной дизъюнктивной нормальной формы:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} J_{\sigma_1}(x_1) \& \dots \& J_{\sigma_n}(x_m) \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_m),$$

где максимум берется по всевозможным наборам значений переменных (x_1, \dots, x_m) . Действительно, рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Найдем значение формулы на этом наборе. Если выполняется равенство $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, то

$$J_{\sigma_1}(\alpha_1) \& \dots \& J_{\sigma_n}(\alpha_m) \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_m),$$

⁴ См. обзор И. Розенберга [Rosenberg 1977] (библиография насчитывает 464 названия), а также сборник работ [Cs  kary and Rosenberg (eds.), 1981].

так как $J_{\sigma_1}(\alpha_1) = \dots = J_{\sigma_m}(\alpha_m) = n-1$ (т.е. равны максимальному значению из множества V_n). Если же $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, то найдется i ($1 \leq i \leq m$) такое, что $\sigma_i \neq \alpha_i$. Тогда $J_{\sigma_i}(\alpha_i) = 0$ (равно наименьшему значению из V_n). Поэтому

$$J_{\sigma_1}(\alpha_1) \& \dots \& J_{\sigma_m}(\alpha_m) \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = 0.$$

Следовательно,

$$\bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_m)} J_{\sigma_1}(\alpha_1) \& \dots \& J_{\sigma_m}(\alpha_m) \& f(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Поскольку рассматриваемая формула построена только из функций системы F , то F — полная система.

- Система Поста $\{\max(x_1, x_2), x+1(\bmod n)\}$ является полной в P_n . Для доказательства нужно посредством суперпозиций этих функций выразить все функции системы Россера и Тюркетта.

Доказательство. Разобьем доказательство утверждения на несколько этапов.

Построим сначала константы. Рассмотрим функции

$$\overline{x} = x+1, \overline{x+1} = x+2, \dots, \overline{(x+n-2)} = x+n-1, x+n = x.$$

При каждом значении x из $V_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ множество значений, принимаемых всеми этими функциями, равно V_n . Поэтому

$$\max(x+1, x+2, \dots, x+n-1, x) = n-1.$$

Остальные константы получаются при помощи функции $x+1(\bmod n)$.

Построим затем функции $J_i(x)$, $i = 0, 1, n-1$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \max(x, x+1, \dots, x+n-2) + 1$$

Если $x = 0$, то $\varphi(0) = \max(0, 1, \dots, n-2) + 1 = n-1$. Если же $x = \sigma \neq 0$, то среди чисел $\sigma, \sigma+1, \dots, \sigma+n-2$ есть число $n-1$. Поэтому $\varphi(\sigma) = n-1+1 = 0$. То есть

$$\varphi(x) = \begin{cases} n-1, & \text{если } x = 0 \\ 0, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

а значит, $\varphi(x) = J_0(x)$. Аналогично функция

$$\psi(x) = \max_{\alpha \neq n-1-i} \{x+\alpha\} + 1$$

равна функции $J_i(x)$. Действительно, при $x=i$ выполняется равенство

$$\psi(i) = \max_{\alpha \neq n-1-i} \{i + \alpha\} + 1 = \max_{\alpha + i \neq k-1} \{i + \alpha\} + 1 = n - 2 + 1 = n - 1.$$

А при $x = \sigma \neq i$ среди чисел

$$\sigma, \sigma + 1, \dots, \sigma + n - 1 - (i - 1), \sigma + n - 1 - (i + 1), \dots, \sigma + n - 1$$

есть число $n - 1$. Поэтому $\psi(\sigma) = n - 1 + 1 = 0$. То есть $\psi(x) = J_i(x)$.

Для доказательства утверждения нам осталось получить только функцию $\min(x_1, x_2)$. Для этого воспользуемся следующим равенством:

$$\min(x_1, x_2) = N(\max(N(x_1), N(x_2))),$$

которое аналогично равенству $x_1 \& x_2 = \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2)$ для функций алгебры логики. Таким образом, нам достаточно получить функцию $N(x)$.

Покажем, как получать произвольные функции одной переменной из P_n . Для произвольных α, β из V_n рассмотрим функции

$$\varphi_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \beta, & \text{если } x = \alpha \\ 0, & \text{если } x \neq \alpha, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \max(J_\alpha(x), n - 1 - \beta).$$

При $x = \alpha$ функция ψ принимает значение $k - 1$, а при $x = \gamma \neq \alpha$ выполняется равенство $\psi(\gamma) = n - 1 - \beta$. Поэтому $\varphi_{\alpha, \beta}(x) = \psi(x) + \beta + 1$. Пусть теперь $g(x)$ — произвольная функция (одной переменной) из P_n . Тогда

$$g(x) = \max(\varphi_{0, g(0)}(x), \varphi_{1, g(1)}(x), \dots, \varphi_{n-1, g(n-1)}(x)).$$

Следовательно, мы можем получить и функцию $N(x)$.

Итак, мы выразили все функции системы

$$F = \{0, 1, \dots, n - 1, J_0(x), J_{n-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$$

в виде формул над исходной системой. Поскольку система F является полной, то получаем, что $\{\max(x_1, x_2), x + 1(\bmod n)\}$ — полная система⁵.

⁵ Два других доказательства функциональной полноты P_n см. в [Barton 1979].

- Система, состоящая из функции Вебба $W_n(x, y)$, является полной в P_n .

Доказательство. Действительно, $W_n(x, x) = x + 1$. Поэтому можно получить любую функцию $\varphi(x) = x + c$, $c \in V_k$. Кроме того, выполняется равенство $W_n(x_1, x_2) + n - 1 = \max(x_1, x_2)$. Поскольку полученные функции образуют полную систему, то и система $\{W_n(x_1, x_2)\}$ является полной. В свою очередь заметим, что через функции логики Поста $\neg x$ и $x_1 \vee x_2$ легко выразима функция Вебба: $W_n(x_1, x_2) = \neg\neg(x_1 \vee x_2)$.

Как видим, обычно доказательство полноты конкретных систем в P_n производится с помощью метода сведения к заведомо полным системам.

7.3.2. Признаки функциональной полноты и неполноты

Существует ряд признаков полноты, в которых рассматриваются множества функций, содержащих некоторые совокупности функций от одной переменной и еще только одну функцию, существенно зависящую не менее чем от двух переменных. Функция $f \in P_n$ называется *существенной*, если она зависит не менее чем от двух переменных и принимает все n значений из множества V_n . Такие функции называются *функциями Слупецкого*. Сформулируем наиболее важные из таких признаков.

Пусть $P_n^{(1)}$ обозначает множество всех функций n -значной логики, зависящих от одной переменной. Функция от одной переменной называется *разнозначной*, если она принимает все n значений. Тогда множество всех разнозначных функций из P_n обозначим посредством S_n и $CS_n = P_n^{(1)} \setminus S_n$.

Критерий Слупецкого: Система $P_n^{(1)} \cup \{f(x)\}$ полна в P_n (при $n \geq 3$) т.т.т., когда $f(x)$ — существенная функция [Slupeski 1939a].

Критерий Яблонского: Система $CS_n \cup \{f(x)\}$ полна в P_n (при $n \geq 3$) т.т.т., когда $f(x)$ — существенная функция [Яблонский 1958; 1986].

Критерий Саломы: Система $S_n \cup \{f(x)\}$ полна в P_n (при $n \geq 5$) т.т.т., когда $f(x)$ — существенная функция [Salomaa 1962].

Понятие замкнутого класса может быть применено к решению вопросов об обосновании неполноты некоторых систем. Например, рассмотрим систему $F = \{\sim x, x \vee y\}$. Из определения операций $\sim x$ и $x \vee y$ следует, что обе функции принадлежат к классу функций, сохраняющих множество истинностных значений $\{0, n-1\}$, т.е. для любого набора σ , состоящего из 0 и $n-1$, значение функции $f(\sigma)$ яв-

ляется 0 или $n-1$. Очевидно, что $F = \{\sim x, x \vee y\}$ является примером еще одного замкнутого класса. В силу сохранения множества $\{0, n-1\}$ замкнутый класс $[\sim x, x \vee y]$ не содержит, например, константу 1. Значит, при $n \geq 3$ F не будет полной системой. На этом примере видно, что хотя система $\{\sim x, x \vee y\}$ и является обобщением системы $\{\neg x, x \vee y\}$ булевых функций, она не является полной. Заметим также, что система функций $\{\sim x, x \rightarrow y\}$ тоже принадлежит к классу функций, сохраняющих $\{0, n-1\}$. В силу этого n -значная логика Лукасевича \mathcal{L}_n не является функционально полной при $n \geq 3$.⁶

7.3.3. Критерий функциональной полноты. Предполнота

Сложной технической проблемой для n -значных логик является проблема распознавания полноты для произвольных систем. Выделяются два подхода к решению задачи о полноте. Первый подход основывается на теореме о существовании алгоритма, позволяющего для каждой конечной системы F выяснить, будет ли она полна или нет. Суть алгоритма сводится к построению строго возрастающей цепочки множеств R_i , содержащих функции от двух переменных. Начиная с некоторого множества R_{i^*} процесс стабилизируется, т.е. последующие множества не содержат новых функций (а всего функций от двух переменных n^{n^2}). Поскольку множество R_{i^*} содержит все функции от двух переменных из класса $[F]$, то система F полна тогда и только тогда, когда функция Вебба $W_n(x, y)$ принадлежит множеству R_{i^*} (см. [Яблонский 1958; 1986]).

Большой интерес вызвал второй подход, который основывается на совокупности всех предполных классов функций в P_n . Система F функций называется *предполной*⁷ (максимальной) в P_n , если F представляет не полную систему, но добавление к F любой функции f такой, что $f \in P_n$ и $f \notin F$ преобразует F в полную систему. Или, в терминах замыкания: F предполна в P_n , если $[F] \neq P_n$ и $[F \cup \{f\}] = P_n$, где $f \in P_n$ и $f \notin F$. Важная роль предполных классов функций видна из следующей теоремы А.В. Кузнецова, которая формулирует *критерий функциональной полноты*: Для любого n

⁶ В примечании на с. 849 Дж. Мак-Кинси [McKinsey 1936] показывает, что функция Вебба не может быть определена в терминах $\sim x$ и $x \rightarrow y$ за исключением случая, когда $n=2$. Таким образом, здесь впервые опубликовано доказательство того, что множество функций \mathcal{L}_n не является функционально полным ни для какого $n \geq 3$.

⁷ Понятие предполноты введено А.В. Кузнецовым в 1955 г.

существует лишь конечное число предполных классов M_1, M_2, \dots, M_q ; при этом система функций F полна в P_n тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном предполном классе M_i [Кузнецов 1956]. См. также [Яблонский 1958; 1986].

7.3.3.1. Предполные классы в P_2 и P_3

Известно, что в булевой алгебре функций существует только пять предполных классов [Post 1920]. В современных обозначениях это выглядит следующим образом:

- T_0 — класс функций, удовлетворяющих условию $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ (сохраняющих 0);
- T_1 — класс функций, удовлетворяющих условию $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ (сохраняющих 1);
- L — класс линейных функций, т.е. функций вида $x_1 \oplus \dots \oplus x_m \oplus a$, где $a \in \{0, 1\}$ (полиномы Жегалкина, не содержащие два и более сомножителей);
- M — класс монотонных функций: $x_1 \leq y_1, \dots, x_m \leq y_m \Rightarrow f(x_1, \dots, x_m) \leq f(y_1, \dots, y_m)$;
- S — класс самодвойственных функций, т.е. таких, что $f(\neg x_1, \dots, \neg x_m) = \neg f(x_1, \dots, x_m)$ (это значит, что на противоположных наборах f принимает противоположные значения).

Классы T_0, T_1, L, M, S являются замкнутыми, что устанавливается индукцией по построению формул.

Малая теорема Поста. Классы T_0, T_1, L, M, S являются предполными, и никаких других предполных классов не существует. Множество булевых функций F является полным т.т.т., когда F не содержится целиком ни в одном из этих пяти предполных классов.

Критерий функциональной полноты для P_2 можно записать в следующем виде. Пусть $F \subseteq P_2$. Тогда

$$[F] = P_2 \Leftrightarrow \forall X \in \{T_0, T_1, L, M, S\} : F \not\subseteq X.$$

Необходимость этого утверждения очевидна, так как если бы все функции из F входили в один из перечисленных классов, то и замыкание F входило бы в этот класс и тогда класс F не полон. При доказательстве достаточности исходим из предположения, что F содержит функции, не входящие ни в один из указанных пяти

классов. Остается показать, что из этих функций можно сконструировать один из полных базисов P_2 .

Эта теорема Поста является следствием из обзора всех замкнутых классов булевых функций, т.е. следствием Большой теоремы Поста [Post 1941]. Первое непосредственное доказательство этой теоремы было получено С.В. Яблонским в 1951 г. (независимо от результатов Э. Поста) и опубликовано в [Яблонский 1952]. Более простое и короткое доказательство А.В. Кузнецова опубликовано в [Яблонский 1958: 18-20]. В [Кузнецов 1959] Малая теорема Поста называется теоремой "Поста-Яблонского". Из современных доказательств см., например, [Марченков 2002].

Очень важным для дальнейшего изложения является понятие сохранения предиката ρ множеством функций из заданного класса, впервые введенное в 1951 г. (см. [Кузнецов 1959; 1961]). Пусть $\rho(x_1, \dots, x_k)$ — k -местный предикат, $f(y_1, \dots, y_m)$ — n -значная функция. Говорят, что функция $f(y_1, \dots, y_m)$ сохраняет предикат $\rho(x_1, \dots, x_k)$ (или соответствующее отношение), если для любых m наборов

$$(a_{11}, \dots, a_{k1}), \dots, (a_{1m}, \dots, a_{km}),$$

удовлетворяющих предикату ρ , набор

$$(f(a_{11}, \dots, a_{1m}), \dots, f(a_{k1}, \dots, a_{km}))$$

также удовлетворяет предикату ρ .

Предикатное описание предполных классов в P_2 было получено А.В. Кузнецовым в 1951 г. (см. [Кузнецов 1959]): T_0 сохраняет предикат $x = 0$, T_1 сохраняет $x = 1$, M сохраняет $x \leq y$, S сохраняет $x \neq y$ и L сохраняет $x \oplus y = z \oplus u$ ⁸. Более того, как следует из [Марченков 2000: с.77], А.В. Кузнецову было известно предикатное описание замкнутых классов булевых функций (результат не опубликован). Первой публикацией на эту тему явилась статья Г.Н. Блохиной [Блохина 1970].

Критерий функциональной полноты для P_3 был найден С.В. Яблонским [Яблонский 1954; 1958], где полностью описываются все 18 предполных в P_3 классов, сохраняющих соответствующие предикаты (см. также [Гиндикин 1972]).

По аналогии с классами T_0 и T_1 в двузначной логике в P_3 имеется шесть классов, сохраняющих собственные подмножества множества $\{0, 1, 2\}$. Обратим внимание на класс $T_{\{0, 2\}}$ — функции, сохраняющие множество $\{0, 2\}$. Заметим, что этот класс функций

⁸ Заметим, что класс линейных функций может быть также охарактеризован как сохранение предиката $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0$ (см. [Марченков 2000]).

соответствует классу функций трехзначной логики Лукасевича \mathbf{L}_3 . Имеется также класс \mathbf{L} линейных функций. В трехзначной логике имеются три класса монотонных функций из-за того, что можно различными способами упорядочивать числа 0, 1, 2 ($0 < 1 < 2$, $1 < 2 < 0$, $2 < 0 < 1$). Остальные упорядочивания не приводят к новым классам. Имеется только один класс самодвойственных функций. Имеются еще три класса, являющихся более тонкими аналогами классов \mathbf{T}_0 и \mathbf{T}_1 в P_2 . Остается указать четыре класса, не имеющих аналогов при $n = 2$ (их точные аналоги совпадают с множеством всех функций P_2). Класс \mathbf{U}_0 состоит из функций, которые на любой совокупности наборов, у которых в некоторых фиксированных разрядах стоят нули, а в остальных их нет, либо не принимают значения нуль, либо равны нулю на всех этих наборах. Класс \mathbf{U}_1 связан с 1 так же как \mathbf{U}_0 с 0. Класс \mathbf{U}_2 аналогичным образом связан с 2. Наконец \mathbf{C} — класс, состоящий из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, и функций, не принимающих, по крайней мере, одного значения (при $n = 2$ это класс функций от одной переменной).

В [Кузнецов 1959] указаны все 18 предикатов (определенных на множестве $\{0, 1, 2\}$), которые сохраняются указанными соответствующими предполными классами функций.

В работе [Захарова, Кудрявцев и Яблонский 1969] отмечается, что А.И. Мальцев доказал, что P_4 имеет в точности 82 предполных класса.

7.3.3.2. Предполные классы в P_n

Теорема А.В. Кузнецова дает способ построения предполных классов и говорит об их конечном числе, но этот способ не является алгоритмом. Тем не менее она открывает перспективы для описания всех предполных классов в P_n для любого $n \geq 3$, что становится фундаментальной проблемой n -значной логики.

Еще в 1951 г. А.В. Кузнецов доказал, что всякий предполный класс функций n -значной логики является классом сохранения некоторого предиката, зависящего (при $n \geq 3$) от не более чем n аргументов. Отсюда получается верхняя оценка: их меньше чем 2^n . А.В. Кузнецовым (неопубликовано) и С.В. Яблонским был построен ряд семейств предполных классов, обобщающих предыдущие примеры на n -значный случай. Первые результаты в этой области были опубликованы в статье С.В. Яблонского [Яблонский 1958], например, в ней были описаны все предполные классы самодвойственных функций и все предполные классы, сохраняющие предика-

ты эквивалентности (разбиения). В [Мартынюк, 1960] описаны все предполные классы монотонных функций. В [Lo Czu Kai 1963] описаны все предполные классы линейных функций. Количество найденных предполных классов стремительно росло и стали полагать, что число различных типов предполных классов должно расти с ростом n . Как отмечается в [Гиндикин 1972: 252], имелась даже гипотеза, что нет описания множества предполных классов для любого n , существенно более эффективного, чем описание, данное в теореме Кузнецова. Однако в [Rosenberg 1965] было анонсировано, а в книге [Rosenberg 1970] дано описание всех предполных классов в n -значной логике.

Множество всех функций $f \in P_n$, сохраняющих предикат ρ , обозначается посредством $Pol(\rho)$. Множества $Pol(\rho)$ являются замкнутыми классами, которые называют также *клонами*⁹. Указание этих предикатов и составляет содержание теоремы Розенберга о полноте в конечнозначных логиках. В результате, следуя И. Розенбергу, все предполные классы делятся на шесть типов (семейств):

- Тип \mathfrak{M} — предполные классы монотонных функций;
- Тип \mathfrak{S} — предполные классы самодвойственных функций;
- Тип \mathfrak{U} — предполные классы функций, которые сохраняют нетривиальные предикаты эквивалентности;
- Тип \mathfrak{L} — предполные классы квази-линейных функций;
- Тип \mathfrak{C} — предполные классы функций, которые сохраняют центральные предикаты;
- Тип \mathfrak{B} — предполные классы функций, которые сохраняют h -универсальные предикаты¹⁰.

В [Rosenberg 1970] доказывается, что все указанные семейства классов являются предполными, и устанавливается критерий функциональной полноты для P_n :

$$[F] = P_n \Leftrightarrow \forall \rho \in \mathfrak{M}_n \cup \mathfrak{S}_n \cup \mathfrak{U}_n \cup \mathfrak{L}_n \cup \mathfrak{C}_n \cup \mathfrak{B}_n : F \not\subseteq Pol(\rho).$$

⁹ Множество $F \subseteq P_n$ называется *клоном* (*clone*), если F замкнуто относительно суперпозиции и ему принадлежит множество всех селекторных функций (*проекций*). Для любого m , $m \geq 1$, и любого i , $1 \leq i \leq m$, функцию $e_i^m(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$, равную значению переменной x_i , называют *селекторной функцией*. При наличии всех селекторных функций значительно упрощаются многие технические выкладки. С другой стороны, клон или *клон операций* — это хорошо известный объект универсальной алгебры (см. [Кон 1968]).

¹⁰ Заметим, что у И. Розенберга вместо предикатов выступают отношения, т.е. вводится понятие сохранения функцией f отношения ρ .

Это несомненно самая значительная теорема в многозначной логике. Доказательство И. Розенберга в более доступной форме излагается в [Lau 2006]. Новое доказательство через модификацию некоторых идей имеется в [Quackenbush 1982]. Описание указанных шести типов классов и подробное доказательство их полноты можно найти в [Яблонский, Гаврилов и Набебин 1997]. То же самое, но в более компактной форме имеется в [Марченков 2004].

Конечно, интересует вопрос о числе предполных классов $\pi(n)$ в P_n для любого $n \geq 2$. В [Захарова, Кудрявцев и Яблонский 1969] показано, что число $\pi(n)$ асимптотически равно

$$\delta(n) \cdot n \cdot 2^{C_{n-1}^{[n-1/2]}},$$

где $\delta(n) = 1$ для нечетных n , $\delta(n) = 2$ для четных n . В этой работе, основываясь на статье [Rosenberg 1965], вычисляется число предполных классов для каждого типа и в общем случае для $n \leq 8$.

Полностью вопрос решен в [Rosenberg 1973], где определена также мощность каждого из указанных семейств предполных классов. Для $\pi(n)$ имеет место следующая таблица:

n	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(n)$	5	18	82	643	15 182	7 848 984	549 761 933 169

Очень быстрый их рост указывает на малую практическую эффективность предполных классов для решения проблемы полноты. Поэтому для практических применений формулируются критерии полноты, в которых используется информация о множестве одноместных функций (см. выше “признаки полноты”).

7.3.3.2.1. «Максимальный» предполный класс и его базис

Особый интерес представляет следующий класс функций. Пусть T_n обозначает множество всех функций из P_n , которые сохраняют 0 и $n-1$, т.е. $f(x_1, \dots, x_m) \in T_n$ т.т.т., когда $f(x_1, \dots, x_m) \in \{0, n-1\}$, где $x_i \in \{0, n-1\}$, $1 \leq i \leq m$. Из теоремы Яблонского о функционально предполных классах функций в n -значной логике [Яблонский 1958] следует, что данный класс функций T_n является предполным в P_n .

Пусть L_3 есть множество функций, соответствующее трехзначной логике Лукасевича L_3 , т.е. $[\sim x, x \rightarrow y] = L_3$. В работе

В.К. Финна [Финн 1969] о функциональной предполноте \mathcal{L}_3 показано, что $\mathcal{L}_3 = T_3$.¹¹

Рассмотрим матричное определение логики T_n , соответствующей множеству функций T_n , которую В.К. Финн [Finn 1975] называет «максимальной n -значной непостовской логикой»¹²:

$$\mathfrak{M}_n^T = \langle V_n, \sim x, x \wedge y, J_0(x), \dots, J_{n-1}(x), N_1(x), \dots, N_{n-2}(x), \{n-1\} \rangle,$$

где

$\sim x, x \wedge y$ и $J_i(x)$ — функции, определенные выше,

$$N_i(x) = \begin{cases} i, \text{ если } x \in \{1, \dots, n-2\} \\ \sim x, \text{ если } x \in \{0, n-1\} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq n-2).$$

Сигнатуру матрицы \mathfrak{M}_n^T можно значительно упростить. Пусть

$$\mathfrak{M}_n^{T^*} = \langle V_n, \sim x, x \rightarrow^{T^*} y, \{n-1\} \rangle \text{ [Карпенко 1989а: 177], где}$$

- 1) если $n = 3$, то $x \rightarrow^{T^*} y = x \rightarrow y$;
- 2) если $n > 3$, то

$$x \rightarrow^{T^*} y = \begin{cases} n-2, \text{ если } x = y \text{ и } x, y \in \{1, \dots, n-2\} \\ x \rightarrow y, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество всех функций матрицы $\mathfrak{M}_n^{T^*}$ обозначим посредством T_n^* .

Теорема. $T_n^* = T_n$ для любого $n \geq 3$.

Доказательство.

$$\text{I. } T_n \subseteq T_n^*.$$

Сначала определим в T_n^* импликацию Лукасевича $x \rightarrow y$:

$$x \rightarrow y = \sim((y \rightarrow^{T^*} x) \rightarrow^{T^*} \sim(y \rightarrow^{T^*} x)) \rightarrow^{T^*} (x \rightarrow^{T^*} y).$$

Легко показать, что

$$x \rightarrow y = \sim((y \rightarrow x) \rightarrow \sim(y \rightarrow x)) \rightarrow (x \rightarrow y).$$

¹¹ Этот результат относительно \mathcal{L}_3 неоднократно переоткрывался. Укажем только [Herzberger 1977] и [Hendry 1980]. Заметим, что уже В.И. Шестаковым [Шестаков 1967] было высказано аналогичное утверждение (без доказательства).

¹² Определение класса непостовских логик см. также в [Бочвар и Финн 1976: 266]. Это такие логики, в которых операции сохраняют истинностные значения 0 и $n-1$.

Поскольку $x \rightarrow^{T^*} y$ отличается от $x \rightarrow y$ только для случая, когда $x = y$ и $x, y \in \{1, \dots, n-2\}$, то остается проверить этот случай. Тогда имеем

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= \sim((n-2) \rightarrow^{T^*} ((n-1)-(n-2))) \rightarrow^{T^*} (n-2) = \\ &= \sim((n-2) \rightarrow^{T^*} 1) \rightarrow^{T^*} (n-2) = ((n-1)-2) \rightarrow^{T^*} (n-2) = n-1. \end{aligned}$$

Следовательно, $E_n \subseteq T_n^*$. Поскольку $x \wedge y \in E_n$, то $x \wedge y \in T_n^*$. Как уже отмечалось, Б. Россер и А. Тюркетт [Rosser and Turquette 1952] показали, что для любого $n \geq 3$ и любого $i \in V_n$, $J_i(x) \in E_n$. Отсюда, $J_i(x) \in T_n^*$. Остается показать, что $N_i(x) \in T_n^*$.

1) $n = 3$. Тогда

$$N_1(x) = \sim x;$$

2) $n \geq 3$. Тогда

$$N_1(x) = (x \rightarrow^{T^*} x) \rightarrow^{T^*} J_0(x),$$

$$N_2(x) = (x \rightarrow^{T^*} x) \rightarrow^{T^*} N_1(x),$$

.....

$$N_{n-2}(x) = (x \rightarrow^{T^*} x) \rightarrow^{T^*} N_{n-3}(x),$$

Таким образом, $T_n \subseteq T_n^*$.

$$\text{II. } T_n^* \subseteq T_n.$$

Выше мы показали, что T_n^* включает в себя T_n . Но T_n является функционально предполным в P_n множеством функций для любого $n \geq 3$. Поскольку T_n^* не является функционально полным множеством функций (функции $\sim x$ и $x \rightarrow^{T^*} y$ сохраняют множество значений $\{0, n-1\}$), то $T_n^* \subseteq T_n$.

Таким образом, $T_n^* = T_n$.

В [Карпенко 1989а: 180] построена также функция Шеффера для T_n .

7.3.4. Функции Шеффера

К проблеме функциональной полноты примыкает задача о базисах и в первую очередь представляют интерес базисы, состоящие из одной функции, которые называются функциями Шеффера. Пусть $F \subseteq P_n$. Тогда функция f из P_n есть функция Шеффера (или единственный генератор) для F , если любая функция из F выражима по-

средством конечного числа суперпозиций функции f , или, по-другому, если $[f] = F$.

Уже говорилось, что в P_2 имеются только две полные системы, состоящие из одной функции: штрих Шеффера $x|y$ и стрелка Пирса $x \uparrow y$. Понятно, что подобные функции также являются функциями Слупецкого. Поскольку $x|y$ есть $\neg(x \wedge y)$ и $x \uparrow y$ есть $\neg(x \vee y)$, то имеется следующий критерий для двужначных функций Шеффера (см. [Шестопал 1961]):

$$[f] = P_2 \Leftrightarrow (f \notin T_0 \wedge f \notin T_1 \wedge f \notin S).$$

В отличие от P_2 , в P_3 имеется 3774 двуместных функций Шеффера (см. [Martin 1954]). В [Wheeler 1961] найдена формула, вычисляющая число m -местных ($m \geq 2$) функций Шеффера в P_3 .

Незначительное усиление теоремы из [Martin 1954] приводит к следующей характеристизации функции Шеффера для P_n :

функция $f(x_1, \dots, x_m)$ из P_n , где $n \geq 3$, является функцией Шеффера т.т.т., когда $f(x_1, \dots, x_m)$ порождает все функции одной переменной, принимающие не более $n-1$ значений [Яблонский 1958: 77]¹³.

По сути это является еще одним критерием функциональной полноты для P_n .

Интересно получить критерий для двужначных функций Шеффера в терминах предполных классов Розенберга, что и было сделано в [Rousseau 1967a]):

$$[f] = P_n \Leftrightarrow \forall \rho \in \mathfrak{S}_n^1 \cup \mathfrak{U}_n \cup \mathfrak{B}_n : f \notin \text{Pol}(\rho)^{14}.$$

В [Schofield 1969] было показано, что эти условия независимы. Отсюда следует, что функция Шеффера существует для любого из указанных классов и что все другие классы не имеют никакой функции Шеффера. Интересно, что в это же время А. Роуз показал [Rose 1969], что не для каждого множества функций n -значной логики существует штрих Шеффера.

В [Rosenberg 1978] приводится библиография по функциям Шеффера включительно по 1978 г. Теория двуместных штрихов Шеффера для P_n и эффективные правила их построения даны [Pinkava 1981]. О симметрических (коммутативных) функциях

¹³ Эта характеристизация получена С.В. Яблонским в 1953 г. (диссертация).

¹⁴ Здесь \mathfrak{S}_n^1 есть класс, сохраняющий одноместные центральные предикаты. О свойствах этого класса и функции Шеффера для него см. также в [Кудрявцев 1970].

Шеффера см. в [Stojmenović 1989]. Ранее было известно, что в P_3 имеется 90 двуместных коммутативных функций Шеффера.

В каждом случае, однако, возникает проблема построения функции Шеффера для функционально неполных логик. Для некоторых трехзначных логик мы этот вопрос рассмотрели в разделе (3.6).

7.3.4.1. Функция Шеффера для E_n

Интересен следующий результат, который понадобится нам в дальнейшем. Дж. Мак-Кинси [McKinsey 1936] сконструировал функцию (штрих) Шеффера для n -значной логики Лукасевича E_n в следующем виде:

$$Exy = CxC\{CNy\}yNCyN\{Cy\}Ny,$$

где C и N — импликация и отрицание в нотации Лукасевича, а скобки указывают на $n-2$ вхождение заключенного в них выражения. Для единообразия обозначим функцию Exy как $x \rightarrow^E y$.

Используя $J_i(x)$ -функции, которые не были известны Дж. Мак-Кинси, можно значительно упростить определение $x \rightarrow^E y$. Заметим, что $J_{n-1}(y) = N\{Cy\}Ny$ и $J_0(y) = N\{CNy\}y$. Тогда

$$x \rightarrow^E y = x \rightarrow (\sim J_0(y) \rightarrow \sim(y \rightarrow J_{n-1}(y))).$$

Применив контрапозицию к консеквенту, получим нужное определение:

$$x \rightarrow^E y = x \rightarrow ((y \rightarrow J_{n-1}(y)) \rightarrow J_0(y)).$$

Для сравнения с импликацией Лукасевича $x \rightarrow y$ определим $x \rightarrow^E y$ следующим образом:

$$x \rightarrow^E y = \begin{cases} 1, & \text{если } y = 0 \\ \sim x, & \text{если } y = 1 \\ x \rightarrow y, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь нужно посредством $x \rightarrow^E y$ определить функции $\sim x$ и $x \rightarrow y$. Мак-Кинси это делает следующим образом:

$$(a) n-1 = (x \rightarrow^E x) \rightarrow^E ((x \rightarrow^E x) \rightarrow^E (x \rightarrow^E x)),$$

$$(b) \sim x = x \rightarrow^E n-1,$$

$$(c) x \rightarrow y = x \rightarrow^E (n-1 \rightarrow^E y).$$

Множество всех суперпозиций функции $x \rightarrow^E y$ обозначим посредством E_n . Таким образом, $E_n = L_n$ для любого $n \geq 2$.

Исследования штриха Шеффера для L_n работой Мак-Кинси не закончились. А. Роуз [Rose 1952] обратил внимание, что функция $x \rightarrow^E y$ не является коммутативной, и предложил новое определение штриха Шеффера для L_n , которое значительно проще:

$$x \rightarrow^D y = x \rightarrow^D \sim y.$$

Однако новый штрих Шеффера не имеет места для случая, когда $n = 3i$, поскольку i тогда является неподвижной точкой. Интересно, что точно такой же штрих Шеффера для L_n был построен в [Hendry and Massey 1969]. Наконец, через 16 лет А. Роуз [Rose 1968] доопределяет функцию $x \rightarrow^D y$ таким образом, что она является штрихом Шеффера для любого $n \geq 3$.

7.4. Принципиальные отличия многозначной логики от двузначной. Континуальность

В книге Э. Поста [Post 1941] поставлен также вопрос об описании всех замкнутых классов в P_n . На положительное решение вопроса дал некоторые основания сам Пост, предложив двузначную интерпретацию логик P_n (см. ниже раздел 10.6)

Однако на самом деле с многозначной логикой дело обстоит совсем по-другому. Оказалось, что имеются существенные различия между классической двузначной логикой и многозначной, говорящие о принципиальной несводимости многозначной логики к двузначной.

Первое качественное отличие (не количественное, как, например, рост числа функций или числа предполных классов при росте числа истинностных значений n) было обнаружено А.В. Кузнецовым в 1951 г. при обобщении теоремы Жегалкина (см. 1.3.1):

Функцию n -значной логики можно представить полиномом по mod n т.т.т., когда n есть простое число (см. [Яблонский 1986]).

Но главные отличия следующие. Ю.И. Янов доказал, что в отличие от P_2 для всякого $n \geq 3$ существует в P_n замкнутый класс, не имеющий базиса [Янов и Мучник 1959], а А.А. Мучник доказал, что для всякого $n \geq 3$ существует в P_n замкнутый класс со счетным базисом [Янов и Мучник 1959]¹⁵. Подробное доказательство см. в [Яблонский 1986, гл.2, § 5]. Непосредственно к этой второй теореме

¹⁵ Это тем более оказалось неожиданно, что в [Яблонский 1958: 77] была высказана гипотеза о том, что каждый замкнутый класс $F \subset P_n$ имеет конечный базис.

примыкает следующий результат А.А. Мучника: для всякого n ($n \geq 3$) P_n содержит континуум различных замкнутых классов¹⁶.

Таким образом, добавление только одного истинностного значения к классической двузначной логике приводит к континуальности. Вообще-то говоря, точная природа такого различия между двузначной и трехзначной логиками неясна, т.е. при переходе от двух истинностных значений к трем озадачивает происходящий скачок от счетности к континуальности.

Отметим также несколько неожиданный факт при переходе от 7 к 8 при изучении предполных классов в P_n :

Для $n \geq 8$ существует предполный класс $F \in \mathfrak{M}_n$ такой, что F не имеет конечного базиса [Tardos 1986] (см. также [Михеева 1986]).

В силу основной трудности (континуальности множества замкнутых классов) исследуется «локальная» информация о структуре окрестности некоторого произвольного замкнутого класса. На один результат, относительно мощности замкнутых классов в самих предполных классах, стоит сослаться (см. [Марченков 1983] и [Demetrovics and Hannak 1983]).

Пусть $n \geq 3$ и пусть F есть произвольный предполный класс из P_n . Тогда мощность решетки замкнутых классов множества F континуальна, т.е. $|\mathbb{L}_n(F)| = \mathfrak{c}$, т.т.т., когда F не является предполным классом типа \mathfrak{L} . Если F — предполный класс типа \mathfrak{L} , тогда в случае, когда $n = p^m$, где p есть простое число, $|\mathbb{L}_n(F)| < \aleph_0$, если $m \neq 1$ и $|\mathbb{L}_n(F)| = \aleph_0$ в остальных случаях.

Целая серия работ в изучении решеток клонов принадлежит А.А. Булатову (см., например, [Bulatov 2001]).

7.5. Трехзначные логики: функциональные свойства

Несмотря на довольно-таки исчерпывающее рассмотрение трехзначных логик в гл. 3, тем не менее остается целый ряд нерешенных проблем. Наиболее интересны следующие:

- 1) классификация функций и число базисов;
- 2) критерий функциональной полноты для различных не-функционально полных логик;
- 3) мощностные характеристики множеств замкнутых классов в этих логиках.

¹⁶ См. также [Hulanicki and Swierckowski 1960].

7.5.1. Классы функций и базисы для P_3

В первую очередь интересует число базисов в самой P_3 . Известно, что функции из P_3 можно классифицировать, используя предполные классы. Вначале определяются классы функций (вектора) относительно того, является или нет какая-либо функция элементом предполного класса. Относительно этих векторов вычисляются полные базисы (агрегаты). Впервые для P_3 это было проведено в [Miyakawa 1971]. Уточнение результатов этой работы сделано в [Stojmenović 1984], откуда следует, что число классов функций в P_3 есть 406 и число базисов есть 6 239 721. Также установлено, что максимальный ранг базиса не превышает 6.¹⁷ При этом указано число базисов для каждого из рангов от 1 до 6. Расчеты велись с помощью компьютерной программы. Таким образом, выяснена точная структура P_3 .¹⁸ Обзор данной проблематики см. в [Miyakawa, Stojmenović, Lau and Rosenberg 1987]. Алгоритмическую проблематику, связанную с вычислениями, см. в книгах [Stojmenović 1987] и [Miyakawa 1988]. Специально о классификации трехзначных функций см. [Miyakawa 2002].

7.5.2. Субмаксимальные клоны

Рассмотрим следующее полезное понятие, впервые введенное [Раца 1969]. Будем называть глубиной системы F функций в классе K_0 наименьшее из таких натуральных чисел m , что существует убывающая последовательность классов K_0, K_1, \dots, K_m , удовлетворяющая двум условиям:

- 1) класс K_{i+1} предполон в K_i ($i = 0, 1, \dots, m-1$);
- 2) система F является полной в K_m .

В частности, то, что глубина системы F в классе K_0 равна 0, означает, что F является полной в K_0 (ср. это определение глубины с [Lau 2006: 433]).

В [Rosenberg 1974] вводится понятие субмаксимального (*submaximal*) класса. Это такие предполные классы функций, глубина которых равна 2. Заметим, что каждый субмаксимальный класс является клоном (см. [Lau 2006: 399]).

¹⁷ Впервые это было вычислено в [Miyakawa 1979].

¹⁸ Число классов функций для P_2 есть 15 [Яблонский 1952] и число базисов (агрегатов) есть 42 [Iburki, Naemura and Nosaki 1963]. Агрегат есть множество всех базисов, имеющих одно и то же множество характеристических векторов. Например, одно и то же множество характеристических векторов имеют функции Шеффера: они не входят ни в один из пяти предполных классов.

Как раз первым примером логики “глубины 2”, чьи функциональные свойства были тщательно изучены, была трехзначная логика Гейтинга G_3 (см. выше раздел 3.2). М.Ф. Раца, ученик А.В. Кузнецова, показал, что класс функций G_3 предполон в классе функций L_3 (как мы уже знаем класс L_3 предполон в P_3), и установил критерий функциональной полноты для класса функций G_3 [Раца 1965а; 1969]. Здесь доказывается, что G_3 имеет ровно 10 предполных классов, и система функций F полна в G_3 т.т.т., когда F не включается ни в один из этих классов¹⁹. Также доказывается, что ранг базиса для G_3 не превышает 6.

Этапной работой, посвященной описанию всех субмаксимальных классов P_3 , т.е. описанию всех предполных классов в каждом из предполных классов Яблонского для P_3 , является статья [Lai 1982]. Эта работа стала основой для вычисления характеристических векторов и базисов для различных предполных в P_3 классов. Из 18 классов Яблонского эта работа уже выполнена для 8 классов. См. соответствующую литературу в [Miyakawa, Rosenberg and Stojmenovic 1990], где установлено, что в предполном классе Яблонского, сохраняющем 0, имеется 253 класса различных функций и 833 720 базисов.

Интереснейшим вопросом, который встает при изучении субмаксимальных клонов, есть вопрос о мощности каждого из этих клонов. Уже в [Раца 1969] был поставлен вопрос о мощности множества замкнутых классов функций, соответствующего трехзначной логике Гейтинга G_3 . Ответ оказался несколько неожиданным, хотя глубина клона G_3 равна 2:

Множество функций G_3 включает континуум замкнутых классов со счетными базисами, а также континуум замкнутых классов, вообще не имеющих базиса [Раца 1982; 1990].

Для порождения континуального множества замкнутых классов функций М.Ф. Раца строит систему функций S , выраженную следующей красивой формулой:

$$\left\{ \bigwedge_{i=1}^n ((\neg x_1 \& \dots \& \neg x_{i-1} \& \neg x_{i+1} \& \dots \& \neg x_n) \Rightarrow \perp x_i) \mid n = 2, 3, \dots \right\},$$

где $\perp x =: x \vee \neg x$.

¹⁹ Отсюда следует, что каждый предполный класс в G_3 имеет глубину, равную 3. Одним из таких предполных классов в G_3 является класс функций $[x, x \vee y, x \wedge y]$ (см. определение трехзначной p -логики в разделе 3.2.2). Вопрос о глубине 3 в западной литературе вообще пока не рассматривается.

Обозначим эти функции — двухместную, трехместную и т.д. символами C_2, C_3, \dots соответственно. Например, C_2 есть

$$(\neg x_2 \Rightarrow x_1 \vee \neg x_1) \& (\neg x_1 \Rightarrow x_2 \vee \neg x_2).$$

Условимся для любых функций $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k)$ и $g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$ из G_3 обозначать символом $f(x_i/g)$ результат подстановки в f функции g вместо переменной x_i . Тогда для всякого $n = 2, 3, \dots$ функция C_n является симметрической (т.е. при всякой перестановке аргументов остается равной себе) и удовлетворяет условиям:

1. $C_n = \perp C_n$,
2. $C_n(x_i/1) = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$,
3. $C_n(x_i/\perp y, x_j/\perp z) = 1 \quad (1 \leq i < j \leq n)$.

Ф. Раца показывает, что при выполнении этих условий система функций C является независимой, откуда следует, что существует континуум различных замкнутых классов функций.

Поскольку класс функций G_3 предполон в L_3 , то таковыми же континуальными свойствами обладает и сама L_3 и, вообще, любая логика, в которой посредством исходных связок можно задать указанную выше систему функций C , является континуальной. Таким образом, можно говорить о некотором критерии континуальности.

Общий ответ на поставленный выше вопрос о мощности субмаксимальных клонов дает следующая весьма примечательная теорема [Bulatov, Lau and Strauch 1996]:

Всего P_3 имеет 158 субмаксимальных клонов. Из них: 5 субмаксимальных клонов имеют конечное множество замкнутых классов; 7 субмаксимальных клонов имеют счетное множество классов; остальные 146 субмаксимальных клонов имеют мощность континуума.

Более того, по отдельности указана мощность каждого из субмаксимальных клонов. В качестве следствия имеем вышеприведенный результат М.Ф. Раца для G_3 . Но, подчеркнем, у М.Ф. Раца приведены базисы для каждого предполного в G_3 класса функций. К сожалению, нет такого описания предполных классов для L_3 . Однако в [Signoli and Monteiro 2006] имеется описание структуры максимальных подалгебр трехзначной алгебры Лукасевича, где понятие максимальной подалгебры соответствует понятию предполного класса функций.

7.5.3. Функциональные свойства B_3

В статьях [Финн 1974b], [Finn 1974] В.К. Финн установил критерий функциональной полноты для класса функций B_3 , соответствующего трехзначной логике Бочвара B_3 (см. выше 3.3). Здесь доказывалось, что B_3 имеет ровно 11 предполных классов, и система функций F полна в B_3 т.т.т., когда F не включается ни в один из этих классов. Отсюда также следует критерий функциональной полноты для множества внешних функций (см. в разделе 3.3.1 о внешних связках логики Бочвара B_3): семь предполных классов. Также В.К. Финн показал, что класс функций H_3 , соответствующий трехзначной логике Холдена H_3 (см. выше раздел 3.3.3), включается в один из предполных классов B_3 .

Тогда можно сделать предположение о глубине рассмотренных классов функций:

$$H_3 \subset B_3 \subset E_3 \subset L_3 \subset P_3,$$

где E_3 есть класс функций, соответствующей трехзначной логике Эббингауза (см. 3.3.3).

Интересна гипотеза В.К. Финна (высказанная автору много лет назад), что мощность множества замкнутых классов B_3 является счетной, как и для P_2 . Эта гипотеза основывалась на предположении о том, что в B_3 класс внутренних функций B_3^{in} (который порождается функциями \sim, \cap) и класс внешних функций B_3^{ex} (областью значения которых является множество $\{0,1\}$) каждый сам по себе счетен, а в объединении они порождают всё множество функций B_3 . Исходя из этого, гипотеза В.К. Финна выглядит очень естественной.

Однако возможны и другие гипотезы. Обратим внимание на работу [Lau 1986] (см. также [Lau 2006: 221]), где дается следующий критерий счетности:

Пусть F есть подкласс P_n (или алгебра со счётным множеством элементов). Там существует отношение частичного порядка \leq на F , удовлетворяющее следующим трем свойствам:

(a) $f \leq g \Rightarrow [f] \subseteq [g]$,

(b) каждая цепь является вполне упорядоченной²⁰ (относительно \leq),

²⁰ Т.е. каждое непустое подмножество обладает единственным минимальным элементом.

(с) каждая антицепь²¹ (относительно \leq) имеет только конечное число элементов.

Тогда F имеет как наибольшее только счётное множество различных подклассов.

Обратим внимание на свойство (а). Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_m)$ не превосходит функцию $g(x_1, \dots, x_m)$, и писать $f \leq g$, если для любого набора (a_1, \dots, a_m) из V_3^m выполняется

$$f(a_1, \dots, a_m) \leq g(a_1, \dots, a_m).$$

В [Карпенко 2009b] показано, что нетрудно подобрать две функции, например, внутреннюю \cap и внешнюю \cap^\square конъюнкции (см. раздел 3.3.1) из B_3 такие, что $(x \cap^\square y) \leq (x \cap y)$. Из теоремы В.К. Финна о критерии функциональной полноты B_3 следует, что множество внутренних функций B_3^{in} и множество внешних функций B_3^{ex} не пересекаются. Это значит, что условие (а) из вышеприведенного критерия счётности в B_3 не выполняется. Однако вышеприведенный критерий счётности составляет всего лишь необходимое условие.

Рассмотрим еще одно предположение в пользу континуальности B_3 . Как уже говорилось (см. раздел 6.3), в [Аншаков и Рычков 1982] предложен метод гильбертовской аксиоматизации широкого класса многозначных логик, основанный на расширении классической логики C_2 . Для этого должны выполняться следующие условия:

- (1) Алгебра $\langle V_n; \vee, \wedge \rangle$ является квазирешеткой;
- (2) Наличие всех J_i -операторов:

$$j_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i \\ 0, & \text{если } x \neq i \end{cases} \quad (\text{для всех } i \in V_n);$$

(3) Ограничения операций $\neg, \vee, \wedge, \supset$ на подмножество $\{0, 1\}$ множества V_n суть обычные классические операции отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и импликации соответственно. Логика B_3 все эти условия выполняет, но не выполняет их логика G_3 : не все J_i -операторы здесь имеют место. Однако все J_i -операторы и не нужны, достаточно, J_0 или J_1 , поскольку с их помощью строится трехзначный нормальный изоморф C_2 (см. раздел 3.3.1). Таким образом, задается некоторый “минимум” функциональных свойств,

²¹ Антицепью называется подмножество частично упорядоченного множества, состоящее из попарно несравнимых элементов, которых не меньше двух.

который достаточен для аксиоматизации некоторой трехзначной логики L_3 . Заметим, что логика Холдена H_3 не содержит операторов J_0 и J_1 и поэтому не имеет нормального изоморфа, а значит, не может быть аксиоматизирована как расширение C_2 .

7.5.3.1. Гипотеза о критерии континуальности трехзначных логик

В связи со сказанным выше в качестве гипотезы можно сформулировать следующий критерий континуальности трехзначных логик. Пусть $F \subseteq P_3$ и $|F|$ есть мощность множества F . Для класса F , соответствующего некоторой трехзначной логике L_3 , $|F| = c$ т.т.т., когда L_3 аксиоматизируема как расширение C_2 .

Таким образом, функциональные свойства некоторого множества функций F связываются с чисто логическими свойствами класса формул соответствующей логики L_3 .

7.5.4. S-классификация

Поскольку не представляется никакой возможности классифицировать континуум замкнутых классов, в конце 70-х – начале 80-х годов появились идеи, которые могли бы привести к конечным либо счетным классификациям. Наибольшее распространение получила идея S-классификации, основанная на новой операции, названной S-замыканием. Пусть $F \subseteq P_n$. S-замыканием множества F называется замыкание F , которое наряду с любой функцией f содержит также все двойственные к ней функции. Показано, что при любом n , $n \geq 3$, число замкнутых классов в S-классификации конечно, хотя и зависит от n экспоненциальным образом.

Например, S-классификация функций трехзначной логики состоит всего из 48 классов и при этом можно обойтись без использования критерия функциональной полноты, основанного на просмотре всех предполных классов. Как раз полному описанию всех этих 48 классов и посвящена работа [Марченков 2001].

7.6. Логика Лукасевича L_n и простые числа

Здесь нам будет удобней работать со следующей формулировкой конечнозначных логик Лукасевича, которая эквивалентна исходной. Под $n+1$ -значной матрицей Лукасевича \mathcal{M}_{n+1}^L будем понимать матрицу следующего вида:

$$\mathcal{M}_{n+1}^L = \langle V_{n+1}, \sim, \rightarrow, \{n\} \rangle \quad (n \geq 2, n \in N), \text{ где}$$

$$V_{n+1} = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

$\{n\}$ — множество выделенных значений.

Функции $\sim x$ и $x \rightarrow y$ определяются на множестве V_{n+1} следующим образом:

$$\sim x = n - x,$$

$$x \rightarrow y = \min(n, n - x + y).$$

Функции $x \vee y$ и $x \wedge y$ определяются через исходные:

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \sim(\sim x \wedge \sim y) = \min(x, y).$$

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \rightarrow y$ обозначим посредством L_{n+1} .

Ранее отмечалось (см. 7.3.3.2.1), что множество функций L_3 является функционально предполным в P_3 , т.е. L_3 оказалось одним из предполных классов Яблонского, а именно тем, который сохраняет 0 и 2 и обозначается посредством T_3 . Таким образом, $L_3 = T_3$. Возникает следующий нетривиальный вопрос: каковы функциональные свойства множества функций L_{n+1} для любого n ?

7.6.1. Функциональные свойства L_n (теорема В.К. Финна)

Ответ на поставленный выше вопрос дан В.К. Финном в тезисах доклада [Финн 1970], а затем опубликовано подробное доказательство в [Бочвар и Финн 1972].

Пусть $I_{\xi\eta}(x)$ есть функции, определяемые следующим образом:

$$I_{\xi\eta}(x) = \begin{cases} \eta, & \text{если } x = \xi \\ 0, & \text{если } x \neq \xi \end{cases} \quad (0 < \xi, \eta < n).$$

Истинностными таблицами, отвечающими указанным функциям, будут таблицы вида

x	0	1	...	i	...	$n-1$	n
$I_{\xi\eta}(x)$	0	0	...	j	...	0	0,

где $\xi = i, \eta = j, 1 \leq i, j \leq n-1$.

Обозначим посредством L_{n+1} множество всех $I_{\xi\eta}(x)$ -функций, определенных в T_{n+1} .

Лемма 1. Множество функций \mathcal{L}_{n+1} является функционально предполным в P_{n+1} т.т.т., когда все функции $I_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq n-1$ принадлежат \mathcal{L}_{n+1} . Причем, если \mathcal{L}_{n+1} — предполное в P_{n+1} множество функций, то $\mathcal{L}_{n+1} = T_{n+1}$ [Бочвар и Финн 1972: 248-253].

Доказательство леммы 1 есть по существу доказательство следующего утверждения: любая функция $f \in T_{n+1}$, которая не равна константе 0, определима посредством суперпозиции $x \vee y$, $x \wedge y$, I -функций и J -функций (эта суперпозиция есть аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы для двузначной логики)²².

Таким образом, ответственным за предполноту \mathcal{L}_{n+1} в P_{n+1} является наличие в \mathcal{L}_{n+1} множества функций I_{n+1} . Возникает вопрос: для каких n имеет место $I_{n+1} \subset \mathcal{L}_{n+1}$, т. е. для каких n $\mathcal{L}_{n+1} = T_{n+1}$?

Лемма 2. $I_{n+1} \subset \mathcal{L}_{n+1}$ т.т.т., когда n есть простое число [Бочвар и Финн 1972: 255-276].

Доказательство леммы 2 хотя и весьма громоздко, но является конструктивным, так как указан алгоритм построения суперпозиций исходных базисных функций $\sim x$, $x \rightarrow y$, равных соответствующим $I_{\xi\eta}(x)$ -функциям. Отсюда, в частности, следует, что при $n = p$, где p — простое число, можно указать эффективный способ построения формулы, отвечающей функции $f \in \mathcal{L}_{n+1}$, использующий I -функции и нормальные формы (I - J -с.д.н.ф.), рассмотренные при доказательстве леммы 1.

Из леммы 1 и леммы 2 получаем теорему, которая дает критерий функциональной предполноты множества функций \mathcal{L}_{n+1} :

Теорема В.К. Финна. $\mathcal{L}_{n+1} = T_{n+1}$ т.т.т., когда для любого $n \geq 2$ n есть простое число²³.

В итоге мы имеем новое определение понятия простого числа: произвольное натуральное число $n \geq 2$ является простым т.т.т., когда множество всех функций \mathcal{L}_{n+1} , соответствующее $n+1$ -значным матричным логикам Лукасевича, есть функционально предполное

²² В связи с этим обратим внимание на следующий результат в [Бочвар и Финн 1972, теорема 4]: каждая тождественно неравная 0 функция $f \in \mathcal{L}_{n+1}$ имеет I - J -совершенную дизъюнктивную нормальную форму т.т.т., когда $n = p^\beta$, где p — простое число, а β — натуральное число, $\beta \geq 1$. В [Aguzzoli, D'Antona and Marra 2005], применяя специальную технику (*Brun hats*), строится аналог булевой СДНФ для \mathcal{L}_{n+1} , когда n есть простое число (вместо дизъюнкции берется функция $x \oplus y =: \sim x \rightarrow y$). Здесь же этот результат распространяется на произвольную \mathcal{L}_{n+1} .

²³ См. также [Финн 1976: 10-15]. Краткое резюме на английском языке имеется в [Finn 1975].

множество в P_{n+1} , а именно $\mathcal{L}_{n+1} = T_{n+1}$. Отсюда следует, что существует бесконечная последовательность p_s+1 -значных логик Лукасевича ($p_s - s$ -е в порядке возрастания простое число в натуральном ряду чисел), которым соответствует последовательность предполных множеств функций, такая, что $\mathcal{L}_{p_s+1} = T_{p_s+1}$ для всех $s = 1, 2, \dots$

Обратим внимание, что после доказательства В.К. Финна появилось еще два доказательства этой теоремы: [Hendry 1983] и [Urquhart 1986: 88-89]. Последнее доказательство целиком основано на критерии Мак-Нотона об определимости функций в \mathcal{L}_{n+1} . Заметим, что на это уже указывал В.К. Финн (см. [Финн 1976, раздел 3.6]), поскольку из теоремы Мак-Нотона следует утверждение леммы 2. Действительно, $I_{\xi\eta}(x) \in \mathcal{L}_{n+1}$ т.т.т., когда наибольший общий делитель чисел n и ξ делит нацело η .

Следствия из осмысления теоремы В.К. Финна оказались совсем неожиданными. Получен результат о структурализации простых чисел в виде корневых деревьев и представлен алгоритм, который по каждому простому числу строит его корневое дерево. Построена конечнозначная логика \mathbf{K}_{n+1} такая, что \mathbf{K}_{n+1} имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число, при этом доказано, что для этого случая \mathbf{K}_{n+1} есть логика Лукасевича \mathcal{L}_{n+1} . Таким образом, дана характеристика простых чисел посредством специального вида логических матриц. Построена функция (штрих) Шеффера для простых чисел, т.е. для классов функций, соответствующих \mathbf{K}_{n+1} . Комбинирование различных алгебро-логических определений простого числа привело к формулировке алгоритма порождения классов простых чисел²⁴. Также дана характеристика посредством логических матриц степени простого числа, нечетных чисел и, самое сложное, четных чисел. Всё это изложено в монографии [Карпенко 2000] (см. также [Karpenko 2006]), название которой было подсказано автору В.К. Финном.

Здесь мы рассмотрим логику \mathbf{K}_{n+1} и ее функциональные свойства, а также сам алгоритм.

7.6.2. Матричная логика для простых чисел

Если простые числа можно охарактеризовать предполными классами функций, то почему бы не найти характеристику простых чисел посредством соответствующих классов тавтологий.

²⁴ В.И. Шалаком представлены компьютерные программы для построения корневых деревьев и порождения классов простых чисел.

Впервые это было сделано в [Карпенко 1982; 1989а] (см. также [Карпенко 1989]), где следующим образом определяется функция $x \rightarrow^K y$: $x \rightarrow^K y = y$, если $0 < x \leq y < n$ и x, y имеют общий делитель; $x \rightarrow^K y = x \rightarrow y$ в остальных случаях. Тогда логика K_{n+1} отличается от L_{n+1} заменой $x \rightarrow y$ на $x \rightarrow^K y$.

Однако для более простого доказательства последующих теорем имеет смысл переопределить функцию $x \rightarrow^K y$.

Определим матрицу $\mathfrak{M}_{n+1}^{K'}$ следующим образом:

$$\mathfrak{M}_{n+1}^{K'} = \langle V_{n+1}, \sim, \rightarrow^{K'}, \{n\} \rangle \quad (n \geq 3, n \in N), \text{ где}$$

$$\sim x = n - x,$$

$$x \rightarrow^{K'} y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x < y < n, (x, y) \neq 1 \text{ и } (x + y) \leq n & (i_1) \\ y, & \text{если } 0 < x < y < n, (x, y) \neq 1 \text{ и } (x + y) > n & (i_2) \\ y, & \text{если } 0 < x = y < n & (ii) \\ x \rightarrow y, & \text{в остальных случаях} & (iii), \end{cases}$$

где $(x, y) \neq 1$ обозначает, что x и y не являются взаимнопростыми числами, а $x \rightarrow y$ есть импликация Лукасевича.

Соответствующую матричную логику обозначим посредством K'_{n+1} , а множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$ обозначим посредством K'_{n+1} .

Теорема 1. Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда $n \in K'_{n+1}$ (подробное доказательство см. в [Карпенко 2000]).

Таким образом, теорема 1 дает новое определение простого числа. Введя обычным образом пропозициональный язык и функцию оценки v на нем, получаем, что матричная логика K'_{n+1} имеет класс тавтологий т.т.т., когда n есть простое число, т.е. каждое простое число определяется соответствующим классом тавтологий. В связи с этим возникает нетривиальный вопрос о функциональных свойствах K'_{n+1} .

Теорема 2. Для любого $n \geq 3$ такого, что n есть простое число, $K'_{n+1} = L_{n+1}$.

Доказательство.

$$I. K'_{n+1} \subseteq L_{n+1}.$$

Из определения $x \rightarrow^{K'} y$ следует, что множество функций K'_{n+1} не является функционально полным ни для какого $n \geq 2$. По крайней мере функции $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$ сохраняют множество значений

$\{0, n\}$, как и множество функций \mathcal{L}_{n+1} . Поскольку множество \mathcal{L}_{n+1} функционально предполно для случая, когда n есть простое число (теорема В.К. Финна), то для этого случая $K'_{n+1} \subseteq \mathcal{L}_{n+1}$.

II. $\mathcal{L}_{n+1} \subseteq K'_{n+1}$.

Надо показать, что функция $x \rightarrow y$ определима посредством суперпозиции $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$. Это можно сделать с помощью следующих определений:

$$(A) \quad x \rightarrow^1 y = \sim((y \rightarrow^{K'} x) \rightarrow^{K'} \sim(y \rightarrow^{K'} x)) \rightarrow^{K'} (x \rightarrow^{K'} y)$$

$$(B) \quad x \vee^1 y = (x \rightarrow^1 y) \rightarrow^1 y$$

$$(C) \quad x \rightarrow^2 y = \sim(\sim x \rightarrow^{K'} \sim(x \rightarrow^{K'} x)) \rightarrow^{K'} y$$

$$(D) \quad x \rightarrow^3 y = ((x \rightarrow^{K'} y) \rightarrow^2 (\sim y \rightarrow^{K'} \sim x)) \vee^1$$

$$(\sim y \rightarrow^{K'} \sim x) \rightarrow^2 (x \rightarrow^{K'} y)) = x \rightarrow y.$$

Полное доказательство см. в [Карпенко 2000], что намного короче, чем доказывать эту теорему с функцией $x \rightarrow^K y$.

Теорема 3. Для любого $n \geq 3$ n есть простое число т.т.т., когда $K'_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1}$.

Доказательство.

I. Если $n \geq 3$ есть простое число, то $K'_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1}$ (теорема 2).

II. Если $K'_{n+1} = \mathcal{L}_{n+1}$, то $n \geq 3$ есть простое число. Докажем контрапозицию этого утверждения. Пусть $n \geq 3$ не есть простое число. Тогда из теоремы 1 (необходимость) следует, что $n \notin K'_{n+1}$. Но свойства множества функций \mathcal{L}_{n+1} такие, что $n \in \mathcal{L}_{n+1}$ для любого $n \geq 3$. Следовательно, если $n \geq 3$ не есть простое число, то $K'_{n+1} \neq \mathcal{L}_{n+1}$.

В заключение определим функцию Шеффера $x \rightarrow^s y$ для класса функций K_{n+1} (см. [Karpenko 1994; 2006], [Карпенко 2000, 3-е изд.]):

$$x \rightarrow^s y = \sim(y \rightarrow^{K'} \sim(\sim y \rightarrow^{K'} \sim y)) \rightarrow^{K'} \sim x.$$

Теперь посредством функции $x \rightarrow^s y$ надо определить функции $\sim x$ и $x \rightarrow^{K'} y$:

$$(a) \quad \sim x = x \rightarrow^s x,$$

$$(b) \quad n = \sim(x \rightarrow^s \sim x) \rightarrow^s \sim(\sim x \rightarrow^s x),$$

$$(c) \quad x \rightarrow^{K'} y = \sim y \rightarrow^s (n \rightarrow^s \sim x).$$

7.6.3. Алгоритм порождения классов простых чисел

Заменим в теореме 2 (II) функцию $x \rightarrow^k y$ на функцию $x \rightarrow^k y$. Обозначим новую последовательность формул посредством $(A^*) - (D^*)$. Нетрудно показать, что тогда формула (D^*) :

$$x \rightarrow^* y = ((x \rightarrow^k y) \rightarrow^2 (\sim y \rightarrow^k \sim x)) \vee^1 \\ (\sim y \rightarrow^k \sim x) \rightarrow^2 (x \rightarrow^k y))$$

определяет импликацию Лукасевича $x \rightarrow y$ только для первых пяти нечетных чисел: 3, 5, 7, 11 и 13. Однако если $x < y$ и $(x, y) \neq 1$, $(n-y, n-x) \neq 1$, то в общем случае $x \rightarrow^* y \neq x \rightarrow y$. Например, пусть $n = 17$, $x = 2$ и $y = 12$. Тогда $x \rightarrow^k y = 12$, $\sim y \rightarrow^k \sim x = 15$, $12 \rightarrow^2 15 = 15$, $15 \rightarrow^2 12 = 14$, $15 \vee^1 14 = 15$. Таким образом, $x \rightarrow^* y = 15$, в то время как $x \rightarrow y = 17$. Можно показать, что итерация \mathcal{D}_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) формулы (D^*) будет задавать классы простых чисел, для которых формула \mathcal{D}_i определяет $x \rightarrow y$. Пусть

$$A_0 = ((x \rightarrow^k y) \rightarrow^2 (\sim y \rightarrow^k \sim x)) \text{ и}$$

$$B_0 = ((\sim y \rightarrow^k \sim x) \rightarrow^2 ((x \rightarrow^k y))).$$

Тогда

$$\mathcal{D}_0 = A_0 \vee^1 B_0,$$

$$\mathcal{D}_1 = (A_0 \rightarrow^2 B_0) \vee^1 (B_0 \rightarrow^2 A_0),$$

$$\mathcal{D}_2 = ((A_0 \rightarrow^2 B_0) \rightarrow^2 (B_0 \rightarrow^2 A_0)) \vee^1 ((B_0 \rightarrow^2 A_0) \rightarrow^2 (A_0 \rightarrow^2 B_0))$$

и так далее.

Таким образом, смысл итерации состоит в том, что берется исходная формула \mathcal{D}_0 , в ней осуществляется операция замены дизъюнкции \vee^1 на импликацию \rightarrow^2 (эту операцию обозначим посредством: $[\rightarrow^2 / \vee^1]$), затем над полученной формулой производится операция обращения (REV), т.е. импликация записывается в обратную сторону, и, наконец, обе формулы соединяются дизъюнктивно.

Заметим, что дизъюнкцию \vee^1 в силу формулы

$$x \vee y = (x \vee^k y) \vee^1 (y \vee^k x) = \max(x, y)$$

можно заменить на обычную дизъюнкцию \vee , что упрощает вычисления. Тогда в общем случае запись итерации выглядит так:

$$\mathcal{D}_i = ([\rightarrow^2 / \vee] \mathcal{D}_{i-1}) \vee (\text{REV}([\rightarrow^2 / \vee] \mathcal{D}_{i-1})).$$

Обозначим посредством P_i класс простых чисел, при которых $\mathcal{D}_i = x \rightarrow y$. В силу идемпотентности операции \rightarrow^2 замена дизъюнкции \vee на \rightarrow^2 сохраняет значения обоих членов дизъюнкции \mathcal{D}_{i-1} , когда они равны, при переходе к \mathcal{D}_i . Отсюда следует, что класс P_{i-1} содержится в P_i . Тогда имеем

$$P_0 = \{3, 5, 7, 11, 13\},$$

$$P_1 = P_0 \cup \{17, 19\},$$

$$P_2 = P_1 \cup \{23, 29, 31, 41, 43, 53, 59, 61\}.$$

С помощью компьютерной программы, написанной В.И. Шаляком в 1995 г., можно вычислить другие P_i . Например,

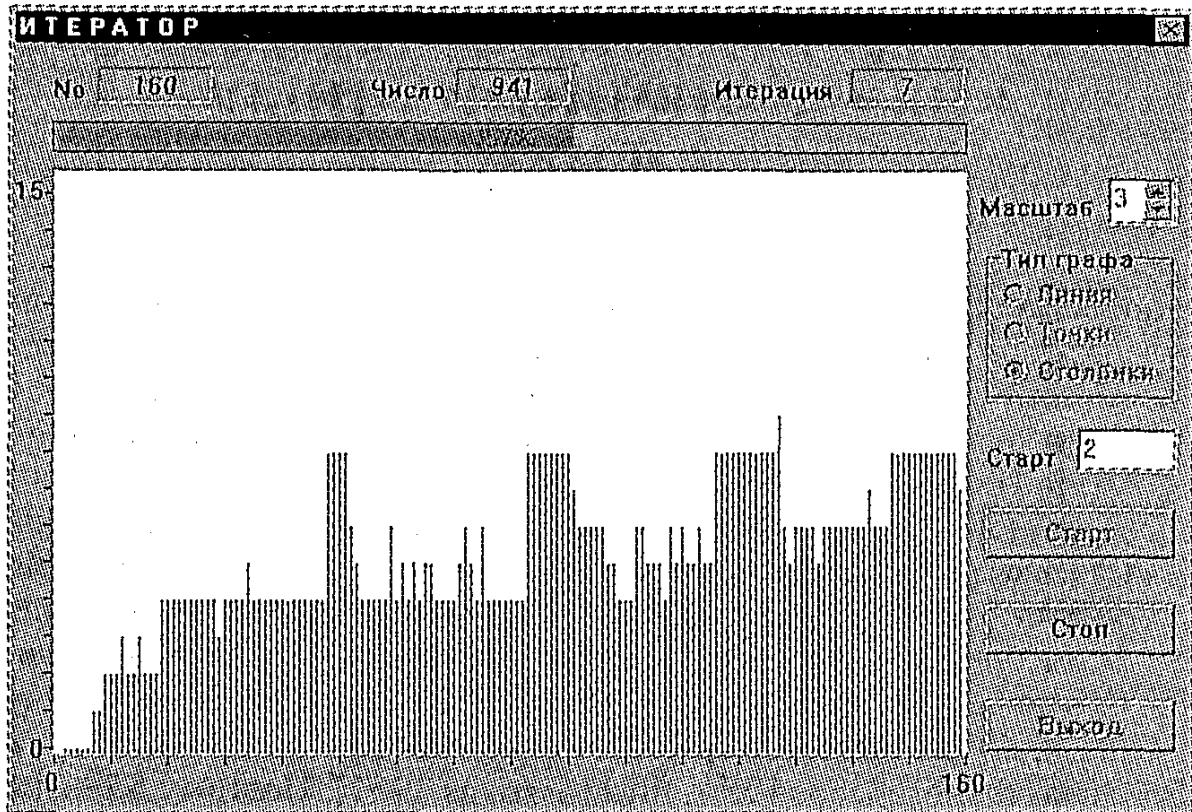
$$P_3 = P_2 \cup \{37, 47, 109\}.$$

Класс P_4 содержит новые простые числа в количестве 51; класс P_5 содержит 21 новое простое число.

Таким образом, для каждого n импликации Лукасевича $x \rightarrow y$ соответствует свой новый класс простых чисел. В результате получаем разбиение множества простых чисел на классы эквивалентности относительно числа итераций. Это разбиение напрямую связано со свойствами импликации Лукасевича.

По существу формула \mathcal{D}_i является *законом порождения классов простых чисел* [Karpenko 1996b]. Подчеркнем, что в силу наличия штриха Шеффера $x \rightarrow^s y$ этот закон может описываться итерацией только одной-единственной функции, а именно штриха Шеффера $x \rightarrow^s y$.

Для наглядности приведем график для определенного числа простых чисел. По вертикали показано число итераций, по горизонтали — простые числа.



Заметим, что вычислять простые числа по формуле \mathcal{D}_i весьма громоздко и не эффективно, тем более что для этого существует огромное число различных алгоритмов (см. обзор [Василенко 1988]). В данном случае нас интересует разбиение простых чисел на классы P_i . И программа В.И. Шалака выполняет именно эту задачу, т.е. \mathcal{D}_i вычисляется только для случаев, когда $n = p$. Поэтому введем функцию i , которая по каждому простому числу дает число итераций $i(p)$. Значения этой функции для $p \leq 1000$ приведены в Таблице 3 (см. [Карпенко 2000, 3-е изд.]). Можно упростить исходную формулу (\mathcal{D}^*), заменив в ней вхождения функции $x \rightarrow^2 y$ на $x \rightarrow y$ и при этом рассматривая только случай $0 < x < y < n$. Однако на компьютерный процесс вычисления это влияет незначительно.

Мы показали, что итерация \mathcal{D}_i порождает классы простых чисел, но встает принципиальный вопрос: порождаются ли все простые числа? На этот вопрос дает ответ

Теорема 4. Каждое простое число (кроме 2) содержится в некотором классе P_i [Карпенко 1997: 178].

8. БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

Мир бесконечнозначных логик исключительно широк. На самом деле этот универсум, как мы увидим, *континуален*. Рассмотрим наиболее известные и важные примеры бесконечнозначных логик.

Однако существует проблема, что считать бесконечнозначной логикой. Например, матрица, полученная в результате счетного числа умножений матрицы \mathcal{M}_2^c классической двузначной логики высказываний C_2 саму на себя имеет 2^{\aleph_0} истинностных значений, т.е. континуальна, и эта матрица является характеристической для C_2 . Это же число истинностных значений имеет и модальная логика $S5$ в интерпретации А. Прайора (см. ниже). Но отличие между логиками C_2 и $S5$ весьма существенно: $S5$ вообще не имеет конечной характеристической матрицы [Scroggs 1951]. Поэтому $S5$ является бесконечнозначной логикой. Другим примером бесконечнозначной матрицы, а вернее, бесконечной последовательности конечных матриц, является последовательность матриц С. Яськовского (см. раздел 4.3.2), которая является характеристической для интуиционистской логики \mathbf{Int} . Заметим, что первоначально не было ясно, является ли \mathbf{Int} конечнозначной логикой или бесконечнозначной. В одних книгах по многозначным логикам рассматриваются модальные льюисовские системы и \mathbf{Int} , в других нет. Но мы уже знаем, как из \mathbf{Int} легко и красиво получается трехзначная логика Гейтинга G_3 (см. раздел 3.2), из $S5$ — четырехзначная логика V_2 (см. раздел 5.4.3.1), а из релевантной логики \mathbf{R} — трехзначная паранепротиворечивая логика $\mathbf{RM3}$ (см. раздел 3.5.2.1). Поэтому кратко рассмотрим эти логики наряду с другими.

Начнем с наиболее известной и самоочевидной бесконечнозначной логики, которая носит имя Лукасевича.

8.1. Бесконечнозначная логика Лукасевича L_∞

Простым способом построения бесконечнозначной логики является следующее естественное обобщение классических операций:

$$\neg x = 1 - x,$$

$$x \vee y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \min(x, y),$$

$$x \supset y = \neg x \vee y = \max(1-x, y),$$

Тогда бесконечнозначную логику можно задать следующей матрицей:

$$\mathfrak{M}_{\infty}^K = \langle [0,1], \neg, \vee, \wedge, \supset, \{1\} \rangle.$$

Обратим внимание, что хотя операции определяются точно так же, как и в классической логике S_2 , тем не менее обобщение S_2 оказалось совсем «не классическим», поскольку даже формула $p \supset p$ не является законом. И вообще, здесь нет тавтологий¹. Если ограничимся тремя истинностными значениями, то получим трехзначную логику Клини K_3 . В связи с этим понятно замечание, сделанное в [Doming, Trilles and Valverde 1981: 233], что импликация Лукасевича \rightarrow была введена из-за того факта, что естественное обобщение классической булевой операции в многозначной логике не удовлетворяет *принципу тождества* $x \rightarrow x = 1$ для всех $x \in [0, 1]$.

Бесконечнозначная логика Лукасевича L_{∞} является исторически первым примером логики, в которой явно определено бесконечное (счетное или континуальное) множество истинностных значений. Само понятие бесконечнозначной логики введено Я. Лукасевичем в [Łukasiewicz 1929, §6] (см в особенности [Łukasiewicz and Tarski 1930]). Обобщение конечнозначной логики Лукасевича L_n (см. выше раздел 5.1.1) на бесконечнозначный случай L_{∞} не составляет труда, поскольку символ n не входит в определение логических операций в \mathfrak{M}_{∞}^L . Поэтому равенства для отрицания \sim и импликации \rightarrow сохраняются; в качестве истинностных значений для счетнозначной логики берется множество рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, а для континуальной логики — множество действительных чисел в отрезке $[0, 1]$. Полученную матрицу обозначим посредством \mathfrak{M}_{∞}^L :

$$\mathfrak{M}_{\infty}^L = \langle [0,1], \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle,$$

где \sim есть унарная и \rightarrow бинарная операции отрицания и импликации соответственно, определенные на множестве $[0,1]$ следующим образом:

$$\sim x = 1-x,$$

$$x \rightarrow y = \min(1, 1-x+y).$$

¹ Другой бесконечнозначной логикой без тавтологий стало обобщение Н. Решером [Rescher 1969: 54] n -значной логики Поста на бесконечнозначный случай.

Операции дизъюнкции и конъюнкции вводятся, как и для \mathbf{L}_n , по определению:

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y) = \min(x, y).$$

Функция оценки (гомоморфизм) v формул пропозиционального языка \mathcal{L} в матрицу \mathfrak{M}_∞^L определяется аналогичным образом, как и для \mathbf{L}_n . Формула A является тавтологией в матрице \mathfrak{M}_∞^L , если $v(A) = 1$ для любой функции оценки v в матрице \mathfrak{M}_∞^L . Бесконечнозначная матричная логика Лукасевича \mathbf{L}_∞ есть множество тавтологий в \mathfrak{M}_∞^L .

А. Линденбаум установил [Łukasiewicz and Tarski 1930: 141], что как счетнозначная логика, так и континуальная логика Лукасевича имеют одно и то же множество тавтологий. Следующий результат принадлежит Я. Лукасевичу [Łukasiewicz and Tarski 1930, теорема 17 (c)]:

$$\mathbf{L}_\infty = \prod_{1 \leq n < \aleph_0} \mathbf{L}_n.^2$$

Там же Лукасевич выдвинул гипотезу, что \mathbf{L}_∞ аксиоматизируется с правилом подстановки и *modus ponens* посредством следующих аксиом:

$$\mathbf{L}1. (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$\mathbf{L}2. p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\mathbf{L}3. ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$$

$$\mathbf{L}4. (\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

$$\mathbf{L}5. ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (q \rightarrow p).$$

Эта гипотеза была подтверждена М. Вайсбергом [Wajsberg 1935: 240], но доказательства не сохранилось. Позже оказалось, что аксиома ($\mathbf{L}5$) не является независимой. Различные доказательства этого факта были получены одновременно и независимо друг от друга К.А. Мередитом [Meredith 1958] и Ч.Ч. Чэном [Chang 1958a]. Таким образом, аксиоматизация \mathbf{L}_∞ получается из аксиоматизации \mathbf{L}_3 (см. раздел 2.4) посредством замены аксиомы ($\mathbf{W}4$) на аксиому ($\mathbf{L}3$). Наконец, А. Роуз и Дж. Россер [Rose and Rosser 1958] опубликовали доказательство полноты ($\mathbf{L}1$) – ($\mathbf{L}5$) относительно \mathfrak{M}_∞^L .

² Доказательства обеих этих теорем появились значительно позже. См, например, [Gottwald 2001: 191-192].

Таким образом, логическая матрица \mathfrak{M}_∞^L является характеристической для исчисления \mathbf{L}_∞ , т.е. \mathbf{L}_∞ имеет бесконечную характеристическую матрицу и, как показал А. Уркварт [Urquhart 1986: 84], для \mathbf{L}_∞ нет конечной характеристической матрицы.

Отметим, что предложенное доказательство полноты \mathbf{L}_∞ весьма громоздко (45 страниц) и к тому же существенно опирается на критерий Р. Мак-Нотона [McNaughton 1951] об определимости операций в бесконечнозначной матрице Лукасевича \mathfrak{M}_∞^L . Имея в виду исключительную важность этой теоремы Мак-Нотона для исследования свойств \mathbf{L}_∞ , приведем необходимую формулировку:

Функция $f(x_1, \dots, x_k)$ определима в \mathfrak{M}_∞^L посредством функций \sim и \rightarrow т.т.т., когда:

- (i) f является непрерывной и $0 \leq f(x_1, \dots, x_k) \leq 1$, где $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$;
- (ii) существует конечное число отличных друг от друга полиномов $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$, каждый из которых имеет форму $\lambda_j = b_j + m_1 x_1 + \dots + m_k x_k$, где все b и m — такие целые числа, что для каждого набора (x_1, \dots, x_k) , $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$, существует j , $1 \leq j \leq \mu$, такое, что $f(x_1, \dots, x_k) = \lambda_j(x_1, \dots, x_k)$;
- (iii) для произвольных x_i , $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$ имеют место неравенства $0 \leq f(x_1, \dots, x_k) \leq 1$.

У Р. Мак-Нотона доказательство не является конструктивным, однако имеется конструктивное доказательство этой теоремы (см. [Mundici 1994]).

Как отмечается в [Aguzzoli and Ciabattoni 2000: 22], в настоящее время \mathbf{L}_∞ не имеет хорошо разработанной теории доказательств³, хотя в литературе встречаются различные (секвенциальные) исчисления для \mathbf{L}_∞ . Однако эти исчисления или не являются аналитическими, т.е. содержат слишком мало информации о конструкции доказательств в \mathbf{L}_∞ (см. [Takahashi 1970], [Prijetelj 1996], [Ciabattoni and Luchi 1997]), или не являются внутренними, т.е. требуют совершенно посторонних средств (см. [Hähnele 1994] и [Mundici and Olivetti 1998]). В свою очередь, в [Aguzzoli and Ciabattoni 2000] строится секвенциальное исчисление для \mathbf{L}_∞ , позволяющее редуцировать понятие логического следования в \mathbf{L}_∞ к тому же самому понятию в подходящих конечных множествах логики \mathbf{L}_n . В результате исчисление является аналитическим и имеет дело только с формулами логики. К тому же все манипуляции при

³ Тем не менее для \mathbf{L}_∞ сконструирован пружер [Beavers 1993a]. См. также [Metcalf, Olivetti and Gabbay 2005].

доказательстве являются синтаксическими и совсем не включают каких-либо алгебраических или геометрических вычислений.

Также стоит добавить, что в указанной работе значительно улучшается результат Д. Мундичи [Mundici 1987], впервые установившего, что проблема разрешимости в \mathbf{L}_∞ может быть редуцирована к той же самой проблеме в подходящем множестве логик \mathbf{L}_n . Усиление результата состоит в том, что общезначимость формулы α в \mathbf{L}_∞ может быть проверена в *точно одной* конечнозначной логике \mathbf{L}_n , и при том для n меньше $2^{\#(\alpha)} + 1$, где $\#(\alpha)$ обозначает общее число вхождений переменных в α .⁴

А теперь несколько замечаний о применении \mathbf{L}_∞ . Исследования Р. Джайлса [Giles 1976; 1977] в поисках подходящей логики для формализации физических теорий с неопределенными высказываниями привели к весьма убедительной философской интерпретации счетнозначной логики Лукасевича \mathbf{L}_∞ , которая имеет (субъективный) вероятностный характер. В работе [Pukacz 1994] показана связь \mathbf{L}_∞ с аксиоматикой квантовой механики. Особое место занимает \mathbf{L}_∞ в исследовании *нечетких* (fuzzy) логик (см. следующую главу). Сама по себе нечеткая логика, построенная на основе некоторой теории нечетких множеств, является по существу многозначной логикой. Поскольку в основе нечетких множеств Заде [Zadeh 1965] лежит множество чисел в интервале $[0, 1]$, то это дало повод считать, что нечеткой логикой является именно континуальная логика Лукасевича \mathbf{L}_∞ . Например, Джайлс [Giles 1976] утверждает, что \mathbf{L}_∞ относится к теории нечетких множеств точно так же, как классическая логика к обычной теории множеств. Такого же мнения придерживается и Х. Скала [Skala 1978]. Моделированию нечетких и неопределенных рассуждений посредством \mathbf{L}_∞ посвящена также значительная часть монографии П. Хаека [Hájek 1998].

Интерес вызывает предикатная бесконечнозначная логика Лукасевича $\forall \mathbf{L}_\infty$. Квантор \forall является инфинитарным обобщением конъюнкции \wedge , а квантор \exists является инфинитарным обобщением дизъюнкции \vee . Долгое время оставалась нерешенной проблема адекватной аксиоматизации для $\forall \mathbf{L}_\infty$. В [Scarpellini 1962] доказано, что множество общезначимых формул в $\forall \mathbf{L}_\infty$ не является рекурсивно перечислимым, т.е. $\forall \mathbf{L}_\infty$ не имеет конечной аксиоматизации

⁴ Техника редуцирования проблемы разрешимости бесконечнозначных логик к конечнозначным логикам развивается в [Aguzzoli and Gerla 2002]. Здесь также рассмотрена логика \mathbf{G}_∞ и логика произведения (о последних двух см. ниже).

(см. также [Mostowski 1964: 72])⁵. Аналогичные этому две аксиоматизации были представлены в [Belluce and Chang 1963] и [Hay 1963]. Подробно о проблемах аксиоматизации $\forall \mathbb{L}_\infty$ см. в [Gottwald 2001, ch. 9.3].

Повышенный интерес к $\forall \mathbb{L}_\infty$ обусловлен тем, что в 1958 г. Т. Скулем показал, что полная аксиома свертывания является $\forall \mathbb{L}_\infty$ -непротиворечивой для теории множеств (упрощенное доказательство см. в [Fenstad 1964]). Подробно об этом и других результатах см. в [Gottwald 2000, ch. 24]. Дополнительную информацию об аксиоматизации $\forall \mathbb{L}_\infty$ и использовании нечетких логик в теории множеств см. в [Di Nola, Georgescu and Spada 2008].

8.1.1. Алгебраизация \mathbb{L}_∞

Целое направление в алгебраической логике было основано работой Ч.Ч. Чэна [Chang 1958b], в которой вводится понятие *MV-алгебры*. Основной целью Чэна была разработка алгебраического аппарата, подходящего для изучения бесконечнозначной пропозициональной логики Лукасевича \mathbb{L}_∞ , точно так же, как булева алгебра стала инструментом для изучения свойств классической пропозициональной логики. В итоге Чэн дает чисто алгебраическое доказательство полноты \mathbb{L}_∞ (см. также [Chang 1959])⁶.

Многообразие, порожденное структурой $\langle [0,1], \oplus, \otimes, \neg, 0, 1 \rangle$, называется *MV-алгеброй*, где

$$\neg x = 1 - x,$$

$$x \oplus y = \neg x \rightarrow y = \min(1, x + y),$$

$$x \otimes y = \neg(\neg x \oplus \neg y) = \max(0, x + y - 1).$$

Аксиоматизация *MV-алгебры* Ч.Ч. Чэном содержит 22 тождества и была упрощена П. Мангани [Mangani 1973] до 9 тождеств следующим образом. Алгебра $A = \langle A, \oplus, \otimes, \neg, 0, 1 \rangle$ есть *MV-алгебра* т.т.т., когда она удовлетворяет следующим тождествам:

$$1. x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

⁵ В связи с этим интересная проблема поставлена В.Н. Гришиным [Гришин 1974: 140]. Берется классическое исчисление предикатов Генцена \mathbb{LK} [Генцен 1967: 26] без правил сокращения. Такая логика обозначается посредством \mathbb{L}° . В силу результата [Scarpellini 1962] следует, что \mathbb{L}° слабее $\forall \mathbb{L}_\infty$. Можно ли добавить к \mathbb{L}° какое-нибудь множество (бесконечное) правил так, чтобы получилась логика $\forall \mathbb{L}_\infty$? В.Н. Гришин показал, что в \mathbb{L}° класс всех аксиом свертывания непротиворечив, а сама \mathbb{L}° разрешима.

⁶ Идеиная сторона доказательства Роуза и Россера о полноте \mathbb{L}_∞ и доказательства Чэна рассматривается в статье [Rosser 1960].

$$2. x \oplus y = y \oplus x$$

$$3. x \oplus 0 = x$$

$$4. x \oplus 1 = 1$$

$$5. \neg 0 = 1$$

$$6. \neg \neg x = x$$

$$7. x \oplus \neg x = 1$$

$$8. \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$$

$$9. x \otimes y = \neg(\neg x \oplus \neg y)^7.$$

Заметим, что аксиомы (1)–(3) устанавливают, что $\langle A, \oplus, 0 \rangle$ есть абелев моноид.

В [Cattaneo and Lombardo 1998] дана независимая аксиоматизация MV -алгебр:

$$1. (x \oplus y) \oplus z = y \oplus (z \oplus x)$$

$$2. x \oplus 0 = x$$

$$3. x \oplus \neg 0 = \neg 0$$

$$4. \neg \neg x = x$$

$$5. \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(x \oplus \neg y) \oplus x.$$

В языке MV -алгебр можно определить следующие операции:

$$x \vee y = (x \otimes \neg y) \oplus y,$$

$$x \wedge y = (x \oplus \neg y) \otimes y.$$

Тогда для каждой MV -алгебры редукт $\langle A, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная дистрибутивная решетка.

Ч.Ч. Чэн показал [Chang 1958b], что булева алгебра совпадает с MV -алгеброй, если в последней имеет место идемпотентность $x \oplus x = x$. В свою очередь, Р. Григолия [Grigolia 1977] на основе MV -алгебры строит MV_n -алгебры для изучения конечнозначных логик Лукасевича \mathbb{L}_n , откуда, например, следует, что алгебраическим примером \mathbb{L}_3 является MV -алгебра, если в последней имеет место $x \oplus x = x \oplus x \oplus x$.

Примеры. Пусть G есть решеточно-упорядоченная абелева группа (l -группа). Для каждого $u \in G$, $u > 0$, пусть $[0, u] =$

⁷ Тождества (6) и (7) можно заменить на тождество $\neg 1 = 0$ (см. [Cignoli and Mundici 1998a]).

$\{x \in G \mid 0 \leq x \leq u\}$, и для каждого $x, y \in [0, u]$, пусть $x \oplus y = u \wedge (x + y)$, $\neg x = u - x$, $1 = u = \neg 0$ и $x \otimes y = 0 \vee (x + y - u)$. Нетрудно видеть, что $\langle [0, u], \neg, \oplus, \otimes, 0, 1 \rangle$ есть MV -алгебра, которая обозначается $\Gamma(G, u)$. Если $G = \mathbf{R}$ (= аддитивная группа действительных чисел с естественным порядком и $u = 1$), тогда $\Gamma(\mathbf{R}, 1)$ совпадает с MV -алгеброй $[0, 1]$, представленной выше.

MV -алгебра называется *линейной* т.т.т., когда определенное на ней отношение частичного порядка $x \leq y$ является также отношением линейного порядка: $x \leq y$ или $y \leq x$.

Главным алгебраическим результатом для логики является

Теорема представления Чэна. *Каждая MV -алгебра изоморфна подпрямому произведению линейно-упорядоченных MV -алгебр, т.е. дефинициальным вариантам матриц Лукасевича для \mathbf{L}_∞ .*

Пусть t_1 и t_2 термы в языке WV -алгебры. Тогда равенство $t_1 = t_2$ имеет место во всех MV -алгебрах т.т.т., когда оно имеет место во всех линейно-упорядоченных MV -алгебрах.

Теорема полноты. *Равенство $t_1 = t_2$ имеет место в $[0, 1]$ т.т.т., когда оно имеет место в каждой MV -алгебре.*

После доказательства полноты Чэном, являющегося теоретико-модельным и использующим элиминацию кванторов, появился целый ряд других доказательств: [Cignoli 1993], где используется представление свободных абелевых l -групп; [Panti 1995], предложившем геометрическое доказательство; наконец, в [Cignoli and Mundici 1997a] дается доказательство теоремы Чэна о полноте, требующее лишь элементарных знаний алгебры.

Изучение алгебраических свойств \mathbf{L}_∞ шло и по другому направлению. Ю. Комори [Komori 1978; 1981] вводит понятие *CN-алгебры*⁸ и в последней работе изучает их некоторые алгебраические свойства, чтобы исследовать расширения \mathbf{L}_∞ (к этому вопросу мы вернемся ниже). Систематическое изучение этих алгебр под названием «алгебр Вайсберга» (W -алгебры) было предпринято в [Rodriguez 1980]. Часть этих результатов опубликована в [Font, Rodriguez and Torrens 1984], где показано, что W -алгебры эквивалентны (взаимно определяемые) MV -алгебрам. Также в [Rodriguez 1980] дана характеристика конечнозначных логик Лукасевича \mathbf{L}_n посредством n -элементных алгебр Вайсберга. Преимущество W -алгебр перед MV -алгебрами в том, что они формулируются в тер-

⁸ Напомним, что Лукасевичем импликация \rightarrow обозначается посредством C , а отрицание \sim посредством N .

минах импликации \rightarrow и отрицания \neg и поэтому их логический смысл более ясен.

Алгебра $A = \langle A, \rightarrow, \neg, 1 \rangle$ есть W -алгебра т.т.т., когда она удовлетворяет следующим тождествам:

$$W1. 1 \rightarrow x = x.$$

$$W2. (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$$

$$W3. ((x \rightarrow y) \rightarrow y) = ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$$

$$W4. (\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x) = 1.$$

Доказательство эквивалентности MV -алгебр и W -алгебр основано на следующих равенствах: $x \rightarrow y = \neg x \oplus y$, $x \oplus y = \neg x \rightarrow y$ и $x \otimes y = \neg(x \rightarrow \neg y)$. Поскольку в W -алгебре имеет место

$$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y; x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y); 0 = \neg 1,$$

то $\langle A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ есть алгебра де Моргана.

Примером W -алгебры является алгебра Линденбаума пропозиционального исчисления L_∞ . Другим примером является матрица M_∞^L .

С другой стороны, алгебры Вайсберга могут быть получены дуальным образом, если идти от BCK -алгебр⁹. Последние были введены в [Iséki 1966] как алгебраический пример для BCK -логики:

$$B. (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$C. (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$K. p \rightarrow (q \rightarrow p).$$

Правила вывода: МР и подстановка. Об этой логике см. в Приложении.

BCK -алгебрам посвящена огромная литература (см. обзор результатов в [Hoo 1988]). В [Wroński 1983] показано, что BCK -алгебра не является многообразием, т.е. ее нельзя задать в виде одних тождеств. В [Tanaka 1975] было введено понятие коммутативной BCK -алгебры, а в [Yutani 1977] показано, что коммутативная BCK -алгебра является многообразием:

$$(1) x * x = 0$$

$$(2) x * 0 = x$$

$$(3) (x * y) * z = (x * z) * y$$

⁹ Свойству дуальности в алгебрах и единому подходу к логическим алгебрам, начиная с BCK -алгебры, посвящена статья [Iorgulescu 2007].

$$(4) \quad x * (x * y) = y * (y * x).$$

Эта аксиоматика независима.

В [Iséki and Tanaka 1978] развиты основные свойства *ВСК*-алгебр и введено понятие *ограниченной коммутативной ВСК-алгебры*, т.е. добавлена 1. Здесь показано, что ограниченная коммутативная *ВСК*-алгебра образует дистрибутивную решетку, а с условием

$$x = x * (y * x)$$

она есть булева алгебра.

Если к аксиомам коммутативной *ВСК*-алгебры добавить аксиому

$$(5) \quad x * 1 = 0,$$

то получим аксиоматизацию *ограниченной коммутативной ВСК-алгебры* [Traczyk 1979].

Заметим, что в [Rodriguez 1980] коммутативные *ВСК*-алгебры выступают под названием «алгебры Сэйла». Из результатов этой работы, а также из работы [Romanowska and Traczyk 1980] следует, что ограниченная коммутативная *ВСК*-алгебра есть *W*-алгебра. В последней работе указанные алгебраические структуры изучались как дуальные друг к другу.

Обратим внимание, что в [Biff 1985] совершенно независимым образом была введена ограниченная коммутативная *ВСК*-алгебра (под другим названием)¹⁰ и доказана эквивалентность с *MV*-алгебрами Чэна. Таким образом, *MV*-алгебры и ограниченные коммутативные *ВСК*-алгебры эквивалентны. Специально этому вопросу посвящена статья Д. Мундичи [Mundici 1986a].

Перечисленные алгебраические структуры, эквивалентные *MV*-алгебрам, отнюдь не единственные, а только лишь первоначально открытые. *MV*-алгебры под названием «symmetric brick» были переоткрыты [Bosbach 1981] в формулировке П. Мангани. Эта структура была получена в ходе исследования определенных решеточно-упорядоченных групп (*l*-групп).

Начиная с фундаментальной работы Д. Мундичи [Mundici 1986b], интерес к теории *MV*-алгебр и к самой \mathbf{L}_∞ повысился чрезвычайно в силу глубоких связей, которые она имеет с функциональным анализом (*AF C**-алгебры); с теорией кодирования [Mundici 1992], с квантовой физикой [Mundici 1993], с геометрией [Mundici 1996]. Была доказана эквивалентность *MV*-алгебр другим важным алгебраическим структурам (см. [Hoo 1990], [Di Nola and

¹⁰ Здесь показано, что аксиома $x * x = 0$ выводима из остальных четырех.

Lettieri 1994] и [*Cignoli and Mundici* 1997b]). Н.Г. Мартинез [*Martinez* 1990] доказал для W -алгебр теорему типа стоуновского представления. Отметим также, что теории MV -алгебр посвящен специальный выпуск журнала «*Mathware & Soft Computing*», 1995, Vol. II, No. 3. В предисловии здесь указывается (с приведением соответствующей литературы) на глубокую связь теории MV -алгебр с теорией нечетких множеств, аналогичную связи булевых алгебр с обычной теорией множеств. См. также монографию П. Хаека [*Hájek* 1998]. (Этот аспект логики \mathbf{L}_∞ мы рассмотрим в следующей главе). Наконец, сошлемся на книгу [*Cignoli, D'Ottaviano and Mundici* 2000], полностью посвященную алгебраическому рассмотрению бесконечнозначной логики Лукасевича, и на статью [*Marra and Mundici* 2003], где рассматриваются последние результаты в этой области.

Заметим, что интерес к алгебраическим исследованиям \mathbf{L}_∞ и родственным ей системам только возрастает. В последнее время в отдельное направление сложилось исследование некоммутативных MV -алгебр (псевдо MV -алгебры) [*Georgescu and Iorgulescu* 1999]. В результате появилась пропозициональная некоммутативная бесконечнозначная логика Лукасевича [*Leustean* 2006].

8.1.2. Изменение множества истинностных значений

Обратим также внимание на два расширения \mathbf{L}_∞ , связанных с введением отрицательных чисел. В первом случае (см. [*Chang* 1963]), в качестве множества истинностных значений берется замкнутый интервал $[-1, +1]$ и исследуется логика \mathbf{L}^* и соответствующие ей MV^* -алгебры. Во втором случае (см. [*Карпенко* 1985] и [*Карпенко* 1988]) в качестве множества истинностных значений берется множество с порядковым типом $\omega + \omega^*$, т. е.

$$\Sigma = \{0^+, 1, 2, 3, \dots, \dots, -3, -2, -1, 0^-\}.$$

Строится логика \mathbf{L}_Σ и для нее фактор-семантика (см. подробно в разделе 10.6.1).

В обоих случаях происходит расширение исходной логики \mathbf{L}_∞ , но с теми же самыми логическими связками, лишь «приспособленными» к новому множеству истинностных значений. Расширение же \mathbf{L}_∞ новыми логическими связками мы рассмотрим ниже (см. раздел 8.3).

8.2. Интуиционистская логика **Int** и класс суперинтуиционистских логик

Первая серьезная критика классической логики привела к созданию логической системы, не только разрушившей диктат одной логики, но приведшей впоследствии к открытию *континуальности логического универсума*.

8.2.1. Появление **Int**

Интуиционистская логика **Int** первоначально возникла как логика интуиционистской математики, но впоследствии получила более широкое применение как чисто логическое, так и философское. Основоположителем направления явился голландский ученый Л.Э.Я. Брауэр (1881–1966), который поставил себе целью полностью освободить математику от трудностей, связанных с канторовским учением о множествах. В собственной программе, названной им «*интуиционистской*», Брауэр предложил строить математику на базе интуитивно ясных потенциально осуществимых «умственных математических построений», совершенно не прибегая при этом к представлению о «множестве». Критике подверглось, в первую очередь, классическое понятие *существования*. Интуиционистское доказательство предложения «существует такое n , что $P(n)$ » должно быть *конструктивным* в следующем смысле: это доказательство действительно представляет пример такого n , что $P(n)$, или, по крайней мере, указывает *метод*, позволяющий в принципе найти такой пример. Классическое понимание, говорящее, что где-то в завершенной бесконечной совокупности всех натуральных чисел встречается такое n , что $P(n)$, для них не годится, поскольку они не рассматривают натуральные числа как образующие завершенную совокупность. В ходе реализации этой программы Брауэр сделал выдающееся открытие, совершившее переворот в логике. В 1908 г. он публикует на голландском языке статью под вызывающим названием: «О достоверности логических принципов» (см. англ. пер. [Brouwer 1975]), где обосновывает, что при интуиционистском понимании суждений закон *исключенного третьего* $p \vee \neg p$, а вместе с ним и метод «от противного» (*reductio ad absurdum*) утрачивают традиционно приписывающийся им статус общелогических норм. Ложность отрицания указывает на недостаточность истинности и поэтому не влечет истинности утверждения. Отсюда классический закон снятия двойного отрицания $\sim\sim p \Rightarrow p$ также отбрасывается. Таким образом, рядом с классической логикой, переставшей теперь

быть *единственной* наукой о способах рассуждений, возникла новая, итуиционистская, логика.

8.2.2. Основные свойства **Int**

Обратим внимание, что после работы Брауэра потребовалось разъяснение сложившейся ситуации и первой попыткой такого рода стала известная работа А.Н. Колмогорова «О принципе *tertium non datur*» [Колмогоров 1925], где впервые дается (частичная) аксиоматизация интуиционистской логики (**Int**) и впервые проводится погружение классической пропозициональной логики C_2 в **Int**. В свою очередь, В.И. Гливенко в 1928 г. (см. русс. пер. [Гливенко 1998a]) опровергает гипотезу о трехзначности **Int**, а в 1929 г. доказал фундаментальный факт об **Int**: произвольная пропозициональная формула A классически доказуема, если и только если $\neg\neg A$ доказуема в **Int** (см. русс. пер. [Гливенко 1998b]).

Уже к концу 20-х годов логика **Int**, устоялась настолько, что ученик Брауэра А. Гейтинг в работе [Heyting 1930] смог представить ее как дедуктивную систему¹¹. Например, аксиоматизация **Int**, как уже говорилось, получается из аксиоматизации классической логики C_2 , в формулировке С.К. Клини (см. выше раздел 1.4), посредством замены закона снятия двойного отрицания $\sim\sim p \supset p$ на закон Дунса Скота $p \supset (\sim p \supset q)$; или она может быть представлена посредством удаления из C_2 закона исключенного третьего.

Гёдель установил [Gödel 1933] (без доказательства), что **Int** обладает *дизъюнктивным свойством*: если $A \vee B$ выводима, то хотя бы одна из формул A или B выводима¹². Очевидно, C_2 не обладает таким свойством. Это свойство выражает тот факт, что дедуктивный аппарат интуиционистского исчисления высказываний согласован с содержательным конструктивным пониманием дизъюнкции: доказать $A \vee B$ означает доказать хотя бы одну из этих формул. Заметим, что с помощью этого свойства просто доказывается теорема об отсутствии конечной характеристической матрицы для **Int** (см. ниже).

Первые результаты исследования **Int** оказались весьма необычными. Напомним, что трехзначная логика G_3 (см. выше раздел 3.2) выступает в качестве модели для **Int** в [Heyting 1930], но ника-

¹¹ Введение в интуиционистскую философию, логику и математическую практику изложено Гейтингом в монографии [Гейтинг 1965]. Обстоятельное введение и обзор логических результатов см. в [Van Dallen 2002].

¹² См. [Расёва и Сикорский 1972: 453-454]. В 1935 г. Г. Генцен (см. [Генцен 1967]) доказал, что предикатная **Int** обладает дизъюнктивным свойством.

кая трехзначная матрица не является характеристической для логики **Int**. В [Gödel 1932] К. Гёдель показал, что **Int** не имеет конечной характеристической матрицы, а между **Int** и C_2 существует счетная последовательность матричных конечнозначных логик G_3, \dots, G_n .

Понадобятся следующие свойства:

(1) в каждой модели \mathcal{M} для **Int**: $x \Rightarrow x = 1$ и $1 \vee x = x \vee 1 = 1$.

(2) если $i \neq j$, то формула $p_i \Rightarrow p_j$ не выводима в **Int**

Метод доказательства состоит в конструировании для каждого натурального числа $n > 1$ недоказуемой в **Int** формулы A такой, что A общезначима во всех n -значных моделях **Int**. В качестве такой формулы Гёдель предлагает следующую конструкцию. Из пропозициональных переменных p_1, \dots, p_{n+1} образуются всевозможные импликации вида $p_i \Rightarrow p_j$, которые затем соединяются в произвольном порядке знаками дизъюнкции. Полученную формулу обозначим посредством D_n :

$$D_n = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} (p_i \Rightarrow p_j).^{13}$$

Допустим, что существует n -значная матрица \mathcal{M}_n , которая, являясь характеристической для **Int**. Заметим, что формула D_{n+1} общезначима в \mathcal{M}_n . Это следует из того, что в матрице \mathcal{M}_n только n элементов, а в D_{n+1} имеется $(n+1)$ переменных. Поэтому найдутся такие k и l ($1 \leq k < l \leq n$), что $x_k = x_l$. Тогда $x_k \Rightarrow x_l = 1$ (см. выше свойство (1)). Таким образом, формула D_{n+1} общезначима. Так как \mathcal{M}_n является по допущению характеристической матрицей, то тогда D_{n+1} выводима в **Int**. Но поскольку **Int** обладает дизъюнктивным свойством, тогда в D_{n+1} должна найтись и выводимая импликация $p_i \Rightarrow p_j$, где $i \neq j$, что противоречит (2)¹⁴.

Подобная конструкция затем часто применялась при доказательстве отсутствия конечной характеристической матрицы для той или иной логики.

Напомним, что С. Яськовский показал [Jaśkowski 1936], что многозначной семантикой для **Int** является бесконечнозначная последовательность конечнозначных матриц (см. выше раздел 4.3.2). Отсюда следует разрешимость **Int**. Это является классическим

¹³ Как нами было принято, операции в матрице и соответствующие им связки обозначаются одними и теми же символами.

¹⁴ Это доказательство взято из [Новиков 1977: 83-84]. Конечно, можно обойтись без теоремы о дизъюнктивном свойстве **Int**, как у Гёделя (см. [Драгалин 1979: 97-98] и [Плиско и Хаханян 2009: 96]).

примером интересного феномена: бесконечнозначная логика финитно аппроксимируется последовательностью конечнозначных логик. Развитие этого результата для других логик см. в [Baaz and Zach 1994] и [Gottwald 2001, ch. 22]. Нельзя не отметить следующий результат А. Вроньского: никакая счетнозначная матрица не является адекватной для доказательства строгой полноты **Int** [Wroński 1974]. Таким образом, логика **Int** является существенно континуальной, в отличие от C_2 , которая является существенно двузначной.

В [McKinsey 1939] было доказано, что, в отличие от C_2 , операции $\neg, \Rightarrow, \vee, \wedge$ в **Int** невыразимы друг через друга. Таким образом, в отличие от L_∞ , в **Int** нельзя взять за исходные связки отрицание и импликацию. Однако для **Int** найдены аналоги штриха Шеффера (см. [Кузнецов 1965]). Также отметим, что один из законов Де Моргана не имеет места в **Int**, а именно:

$$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

Заметим, что предикатная **Int** в ряде случаев отличается от классической логики. Например, хотя оба исчисления неразрешимы, интуиционистская логика одноместных предикатов тоже неразрешима в отличие от классического одноместного исчисления предикатов.

8.2.2.1. Философская интерпретация **Int** (семантика возможных миров)

В 1954 г. появляется концепция реляционной модели у А. Прайора, а в 1957 г. в работах С. Кангера и Я. Хинтикки, пока С. Крипке не выразил эту идею в 1959 г., а затем в 1963 г. в наиболее ясной и законченной форме для модальных логик (см. [Крипке 1974a]). Шкалой Крипке (структурой, фреймом) называется пара $\langle W, R \rangle$, где W — множество возможных миров (точки, моменты, вынуждающие условия), а R — бинарное отношение достижимости на мирах.

В [Grzegorchyk 1964] и [Kripke 1965] появилась семантика возможных миров для **Int**. Мы будем следовать работе М. Фиттинга [Fitting 1969]. Пусть дана некоторая модель Крипке $\langle W, R, e \rangle$, где W — непустое множество возможных миров; R — отношение частичного порядка (рефлексивно и транзитивно) на W , и e — функция оценки формул на подмножествах W . Определим отношение \Vdash между элементами $w \in W$ и формулами **Int**, где $w \Vdash A$ читается «в мире w имеет место формула A »:

1. $w \Vdash p$ т.т.т., когда для всех z таких, что $wRz, z \in e(p)$

2. $w \Vdash A \wedge B$ т.т.т., когда $w \Vdash A$ и $w \Vdash B$
3. $w \Vdash A \vee B$ т.т.т., когда $w \Vdash A$ или $w \Vdash B$
4. $w \Vdash A \Rightarrow B$ т.т.т., когда для всех z таких, что wRz , если $z \Vdash A$, то $z \Vdash B$
5. $w \Vdash \neg A$ т.т.т., когда для всех z таких, что wRz , не имеет места $z \Vdash A$.

В модели Крипке $\langle W, R, e \rangle$ имеет место $w \Vdash A$ т.т.т., когда для всех $w \in W$, $w \Vdash A$. Относительно этой семантики доказывается полнота исчисления **Int**.

Основная философская проблема: что это за сущности такие — *возможные миры*? Первая философская работа по интерпретации **Int** (истинности в **Int**) принадлежит А. Гжегорчыку [Grzegorchyk 1964]. Конечно, такого рода интерпретации не лишены элемента произвольности. В несколько общем виде философская интерпретация **Int** обсуждается в [Драгалин 1979: 115-119]. Будем интерпретировать миры как возможные состояния знания некоторого познающего субъекта. Субъект видит, что в настоящий момент он находится в состоянии w — это его «реальный мир». Если $w \leq z$, то состояние z можно рассматривать как более позднее, как результат развития w . Соответственно, информация, приписанная z , является расширением информации w . Мы считаем, что со временем найденная информация не теряется, а может лишь приобретаться. Это выражается семантической леммой, имеющей место в **Int**:

Для любой $\langle W, R, e \rangle$ и $w \in W$, $w \models A$ т.т.т., когда для всех z таких, что wRz , $z \models A$.

Индукцией по построению формулы A легко выяснить, если она истинна в каком-то мире, то истинна и во всех достижимых мирах (благодаря отношению R). М. Фиттинг, у которого миры тоже есть «состояния знания», интерпретирует данную лемму так: если в настоящее время мы знаем, что A истинно, то в любое позднее время мы все еще знаем, что A истинно [Fitting 1969: 21]. У М. Даммита [Dummett 1977: 182] моменты из W есть «состояния информации» (в этой работе он дает *интуиционистски приемлемое* доказательство полноты **Int**, при этом по существу используя конечные деревья Крипке). Гораздо дальше пошли Н.К. Верещагин и А. Шень [Верещагин и Шень 2008]: W есть множество возможных состояний цивилизаций; $w \leq z$ означает, что мир z может получиться из мира w в результате развития цивилизации. Истинность $\neg A$ в мире w означает, что ни при каком развитии цивилизации из состояния w высказывание A не станет истинным.

8.2.3. Суперинтуиционистские логики

Суперинтуиционистской логикой (*si*-логикой) называется логика, полученная посредством расширения **Int** аксиомами в этом же языке. Члены последовательности конечнозначных логик Гёделя G_n являются *si*-логиками (см. раздел 5.1.7), самой известной из которых является трехзначная логика Гейтинга G_3 . Добавление к **Int** слабого закона исключенного третьего $\neg p \vee \neg\neg p$ образует *si*-логику **КС** (логика Янкова). Еще одной хорошо известной *si*-логикой является расширение **Int** посредством аксиомы $((\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee \neg p)) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p)$ (логика Скотта **SL**). Имеются обзоры по пропозициональным *si*-логикам [Hosoi and Ono 1973] и по предикатным *si*-логикам [Ono 1987].

Специальный интерес к *si*-логикам проявился в 50-е годы, когда стали изучаться целые классы *si*-логик (см. [Umezava 1959]). Изучение способов рассуждения в некоторой *выделенной* логической системе (пусть даже такой, как классическая или интуиционистская логика) отодвигается на второй план. А на первый план выдвигается изучение *класса* логик с «хорошими» семантическими или синтаксическими свойствами. Например, выделяется какой-то интересный класс шкал Крипке. Естественно возникает вопрос, какой класс логик моделируется этими шкалами? С другой стороны, имеется класс логик с хорошо определенным свойством, например, с дизъюнктивным свойством. Естественно возникает вопрос: имеется ли для них полная по Крипке семантика?

В течение долгого времени оставалась надежда найти полное описание *решетки* *si*-логик — тогда можно было бы «обозреть» любую логику и даже, может быть, представить их в виде исчисления. Все эти надежды были разрушены открытием В.А. Янкова [Янков 1968] *континуального* класса *si*-логик (т.е. мощность множества всех логик между **Int** и C_2 континуальна), причем в нем имеются и логики, не являющиеся финитно-аппроксимируемыми и конечно аксиоматизируемыми. В свою очередь, в [Шехтман 1978]) была решена старая проблема и представлена конечно-аксиоматизируемая, но не являющаяся разрешимой логика. Более того, А.В. Кузнецов доказывает теорему о континуальности всякого интервала между **Int** и её собственным расширением [Кузнецов 1971]. Различные континуальные классы пропозициональных *si*-логик рассмотрены А.В. Чагровым и М. Захарьяшевым [Chagrov and Zakharyashev 1993]. Оказалось, например, что имеется континуум *si*-логик с дизъюнктивным свойством и континуум *si*-логик без дизъюнктивного свойства, причем не существует алгоритма, по которому можно было бы определить, к какому из двух континуаль-

ных классов данная логика принадлежит. Понятно, что существует некоторая корреляция между неразрешимостью некоторого свойства и континуальностью множества логик с этим свойством. Оказывается, континуальность классов логик является не исключением, а нормой¹⁵.

Несколько иная ситуация сложилась относительно расширений бесконечнозначной логики Лукасевича \mathbf{L}_∞ . Еще А. Роуз [Rose 1953b] показал, что мощность множества всех собственных расширений бесконечнозначной логики Лукасевича \mathbf{L}_∞ , т.е. мощность множества всех логик между \mathbf{L}_∞ и \mathbf{C}_2 , является счетной. При этом доказательство существенно опирается на критерий Р. Мак-Нотона.

8.2.3.1. Логика Гёделя–Даммита \mathbf{G}_∞

По-видимому, самой известной *si*-логикой (кроме самих \mathbf{Int} и \mathbf{C}_2) является бесконечнозначная логика Гёделя–Даммита \mathbf{G}_∞ , логическая матрица которой получается из матрицы для \mathbf{G}_n посредством введения бесконечного числа истинностных значений $[0, 1]$ (ранее эта логика обозначалась посредством \mathbf{LC} и называлась *цепной* (линейной) логикой Даммита). Определение логических операций на этом множестве следующее: $x \Rightarrow y$ есть 1, если $x \leq y$, и y в остальных случаях; $\neg x$ есть просто $x \Rightarrow 0$, и \wedge и \vee есть, соответственно, *min* и *max* операции. $\{1\}$ – множество выделенных значений. Даммит показал [Dummett 1959], что множество тавтологий \mathbf{G}_∞ аксиоматизируется аксиомами \mathbf{Int} , расширенной аксиомой *линейности*

$$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p).$$

Здесь же показано, что \mathbf{G}_∞ характеризуется пересечением множества тавтологий всех \mathbf{G}_n .

Заметим, что теперь в этой логике дизъюнкция определима через импликацию и конъюнкцию:

$$p \vee q =: ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \wedge ((q \Rightarrow p) \Rightarrow p).$$

В [Horn 1969] дано алгебраическое доказательство полноты логики \mathbf{G}_∞ , где вводится понятие *L*-алгебры: алгебра Гейтинга (см. раздел 4.4.2) плюс тождество

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1.^{16}$$

¹⁵ Имеются континуальные классы модальных, релевантных, паранепротиворечивых и т.д. логик.

¹⁶ В последнее время в связи с развитием нечетких логик, основанных на *t*-нормах (см. ниже раздел 9.3.2), такие алгебры стали называться *алгебрами Гёделя* (*G*-алгебры).

Эта логика привлекла к себе большое внимание. В [Visser 1982] она используется в исследованиях *доказуемой логики* арифметики Гейтинга; в [Pearce 1999] она применяется для анализа выводов расширенной логики программирования; в [Hájek 1998] она признана одной из трех наиболее важных формализаций нечеткой логики (см. следующую главу).

Первая секвенциальная формулировка G_∞ с устранимым сечением представлена в [Sonobe 1975] (см. также [Смирнов 1983]). Она была улучшена в [Avelone, Ferrari and Miglioli 1999] и [Dyckhoff 1999], где также представлены версии с устранением сокращения. Более подходящая формулировка дана А. Авроном [Avron 1991b], которая имеет те же самые логические правила, что и стандартная формулировка **Int**. Однако в этой работе правила не являются обратимыми (*invertible*), что затрудняет поиск доказательств. Наконец в [Avron and Konikowska 2001] представлена система, основанная на обратимых двухпосылочных правилах, наиболее приспособленная для поиска доказательств. То же самое имеет место и для конечнозначных логик Гёделя G_n .

Впервые предикатная логика QG_∞ была аксиоматизирована в виде секвенциального исчисления в [Takeuti and Titani 1984] (без ссылки на статью Даммита). Основной задачей было построение интуиционистской нечеткой теории множеств. В [Avellone et al. 1999] представлены аналитические таблицы для первопорядковой G_∞ . В [Corsi 1992] для QG_∞ доказана полнота по Крипке относительно линейных шкал Крипке. В [Skworsov 2005] дано значительное упрощение этого доказательства и рассмотрены некоторые не полные по Крипке расширения QG_∞ . Наконец, в [Baaz, Preining and Zach 2007] дается аксиоматизация целого семейства предикатных логик Гёделя–Даммита (в зависимости от выбора множества истинностных значений), а также различных их фрагментов.

8.3. Синтез логик L_∞ и G_∞

Представляет интерес сравнение двух хорошо известных бесконечнозначных логик: L_∞ и G_∞ . В обеих этих логиках закон исключенного третьего $p \vee \sim p$ не имеет места. Их импликативные фрагменты содержат **ВСК**-логику (см. выше). Более точно, обе логики являются расширением «базисной логики» **BL** (см. следующую главу). С алгебраической точки зрения обе они имеют дистрибутивную решеточную структуру и являются расширением **BL**-алгебры.

В разделе (5.1.7) мы сравнивали между собой конечнозначные логики Лукасевича L_n и Гёделя G_n и показали, что операции из G_n выразимы посредством операций из L_n для любого конечного n . Но

для бесконечнозначного случая это не проходит, поскольку, используя критерий Р. Мак-Нотона [McNaughton 1951] об определении операций в \mathbb{L}_∞ , можно показать, что ни операция $\lceil x$, ни операция $x \Rightarrow y$ не определены в \mathbb{L}_∞ .

Теперь рассмотрим вопрос о синтезе логических и алгебраических свойств этих различных логик.

8.3.1. Симметрический моноид Гейтинга SHM и алгебра Вайсберга–Гейтинга WH

В [Васюков и Карпенко 1987] вводится понятие симметрического моноида Гейтинга $SHM = \langle A, \Rightarrow, \oplus, \sim, 1, 0 \rangle$, который представляет собой алгебру типа $(2,2,1,0,0)$ со следующей аксиоматикой.

A1. Аксиомы позитивной импликационной алгебры

$PI = \langle A, \Rightarrow, 1 \rangle$ [Rasiowa 1974a: 22]:

- 1.1. $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
- 1.2. $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 1$
- 1.3. если $x \Rightarrow y = 1$ и $y \Rightarrow x = 1$, то $x = y$
- 1.4. $x \Rightarrow 1 = 1$.

A2. Аксиомы абелева моноида $AM = \langle A, \oplus, 0 \rangle$ (см. выше аксиоматизацию MV -алгебры):

- 2.1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
- 2.2. $x \oplus y = y \oplus x$
- 2.3. $x \oplus 0 = x$.

A3. Аксиомы для инволюции \sim :

- 3.1. $\sim\sim x = x$
- 3.2. $\sim 1 = 0$
- 3.3. $\sim 0 = 1$.

A4. Аксиомы связи:

- 4.1. $(x \Rightarrow y) \oplus z = (x \oplus z) \Rightarrow (y \oplus z)$
- 4.2. $\sim(x \oplus y) \oplus y = \sim(\sim x \oplus \sim y) \oplus \sim x$
- 4.3. $x \oplus \sim x = 1$
- 4.4. $x \oplus 1 = 1$.

Понятие симметрического моноида Гейтинга обязано своим существованием гипотезе автора этой книги о том, что импликация Лукасевича \rightarrow может быть определена таким образом, чтобы связать между собой логику \mathbf{L}_∞ с логикой \mathbf{G}_∞ :

$$Df1. \ x \rightarrow y =: (x \Rightarrow y) \oplus (\sim y \Rightarrow \sim x).$$

В этой же работе вводится понятие *алгебры Вайсберга-Гейтинга* $WH = \langle A, \rightarrow, \Rightarrow, \neg, 1 \rangle$, которая представляет собой алгебру типа $(2,2,1,0)$ со следующей аксиоматикой:

AI. Аксиомы алгебры Вайсберга $W = \langle A, \rightarrow, \neg, 1 \rangle$ (см. выше раздел 8.1.1).

AII. Аксиомы положительной импликационной алгебры $PI = \langle A, \Rightarrow, 1 \rangle$ (см. выше).

AIII. Аксиома связи:

$$\neg(x \Rightarrow y) \rightarrow z = (\neg x \rightarrow z) \Rightarrow (\neg y \rightarrow z).$$

Определения:

$$Df2. \ 0 =: \neg 1.$$

$$Df3. \ x \oplus y =: \neg x \rightarrow y.$$

$$Df4. \ \neg x =: \sim x.$$

В указанной работе доказывается следующая

Теорема. Алгебры $SHM = \langle A, \Rightarrow, \oplus, \sim, 1, 0 \rangle$ и $WH = \langle A, \rightarrow, \Rightarrow, \neg, 1 \rangle$ эквивалентны.

Пропозициональную логику, алгебраическим примером которой является WH -алгебра, обозначим посредством \mathbf{LG}_∞ .

Через 15 лет в [Cattaneo and Ciucci 2002] введено понятие *алгебры Гейтинга-Вайсберга* $HW = \langle A, \rightarrow, \Rightarrow, 0 \rangle$, которая представляет собой алгебру типа $(2,2,0)$ со следующей аксиоматикой.

Определения:

$$Df1. \ \neg x =: x \rightarrow 0.$$

$$Df2. \ \sim x =: x \Rightarrow 0$$

$$Df3. \ 1 =: \neg 0$$

$$Df4. \ x \wedge y =: \neg((\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow \neg y)$$

$$Df5. \ x \vee y =: (x \rightarrow y) \rightarrow y).$$

Аксиомы:

$$HW1. \ x \Rightarrow x = 1$$

$$HW2. x \Rightarrow (y \wedge z) = (x \Rightarrow z) \wedge (x \Rightarrow y)$$

$$HW3. x \wedge (x \Rightarrow y) = x \wedge y$$

$$HW4. (x \vee y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \wedge (y \Rightarrow z)$$

$$HW5. 1 \rightarrow x = x$$

$$HW6. x \rightarrow (y \rightarrow z) = \neg(x \rightarrow z) \rightarrow \neg y$$

$$HW7. \neg \sim x \rightarrow \sim \sim x = 1$$

$$HW8. (x \Rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1.$$

Можно показать, что алгебры $WH = \langle A, \rightarrow, \Rightarrow, \neg, 1 \rangle$ и $HW = \langle A, \rightarrow, \Rightarrow, 0 \rangle$ эквивалентны. Заметим, что в [Cattaneo, Ciucci, Giuntini and König 2004a] доказывается, что $HW \langle A, \rightarrow, \neg, 1 \rangle$ есть алгебра Вайсберга W с аксиомами $W1, W2, W3, W4$ (см. выше раздел 8.1.1). Также доказывается, что в HW имеют место все аксиомы симметрической алгебры Гейтинга (см. выше раздел 4.4.2).

Также отмечается, что HW можно рассматривать как модальную алгебру, поскольку в ней определимы модальные операторы $\Box x =: \sim \neg x$ и $\Diamond x =: \neg \sim x$. При этом выполняются все аксиомы модальной логики $S5$ (см. ниже), но основой является не булева алгебра, а алгебра Клини.

8.3.1.1. Алгебры, эквивалентные HW

В [Карпенко 1997: 86] к операциям матрицы для L_∞ добавляется отрицание \neg из G_∞ . Тогда

$$x \Rightarrow y = \neg(x \rightarrow y) \vee y$$

(см. раздел 5.1.7, где $J_1(x)$ есть $\neg \sim x$).

Пользуясь «симметризацией» алгебры Гейтинга, проведенной А. Монтейро (см. выше раздел 4.4.2), получаем

$$x \Leftarrow y = \sim(\sim x \Rightarrow \sim y).$$

Таким образом, в L_∞ с \neg выразимы операции **Н-В-логики** [Rauszer 1974]. Здесь же утверждается (без доказательства), что алгебра Вайсберга W с \neg эквивалентна алгебре Вайсберга–Гейтинга WH .

Интересно, что в [Cattaneo, Dalla Chiara and Giuntini 1998] вводится понятие «Брауэра-Заде многозначной алгебры с законами Де Моргана». Эти алгебры обозначаются посредством $BZMV^{IM}$ и являются усилением MV -алгебры посредством добавления операции \neg из G_∞ . В этом же году в [Hájek 1998] вводится понятие MV_Δ -

алгебры, которая есть расширение MV -алгебры посредством добавления модального оператора Δ , введенного в [Baaz 1996] и который на линейно-упорядоченной структуре определяется следующим образом:

$$\Delta x = 1, \text{ если } x = 1 \text{ и } \Delta x = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Аксиоматизацией логики \mathbb{L}_Δ [Hájek 1998] являются схемы аксиом для \mathbb{L}_∞ и следующие пять аксиом для оператора Δ , взятые из [Baaz 1996]:

- ($\Delta 1$) $\Delta A \vee \sim \Delta A$,
- ($\Delta 2$) $\Delta(A \vee B) \rightarrow (\Delta A \vee \Delta B)$,
- ($\Delta 3$) $\Delta A \rightarrow A$,
- ($\Delta 4$) $\Delta A \rightarrow \Delta \Delta A$,
- ($\Delta 5$) $\Delta(A \rightarrow B) \rightarrow (\Delta A \rightarrow \Delta B)$.

Наконец, в [Belluce 1997] вводится понятие стоуновской MV -алгебры (SMV -алгебры) посредством некоторого ограничения на множество булевых элементов, что дает возможность ввести стоуновское отрицание.

В [Cattaneo, Giuntini and Pilla 1999] доказана эквивалентность между SMV и $BZMV^{dm}$ алгебрами, а в [Cattaneo, Ciucci, Giuntini and König 2004b] доказывается эквивалентность между MV_Δ и $BZMV^{dm}$ алгебрами и между $BZMV^{dm}$ и HW -алгебрами. Таким образом, все указанные алгебры эквивалентны. Также доказывается (берется HW -алгебра), что имеет место условие Даммита, т.е. линейность:

$$(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1.$$

В этой же работе, используя результаты из [Hájek 1998], где дана теорема представления для MV_Δ -алгебры и доказана теорема полноты для соответствующего пропозиционального исчисления, получены аналогичные результаты для остальных алгебр и соответствующих им исчислений. Приведем аксиоматику пропозиционального исчисления **HWL** в виде аксиомных схем с исходными связками \sim, \rightarrow (из \mathbb{L}_∞) и \Rightarrow (из \mathbb{G}_∞).

Определения:

$$\top A =: A \Rightarrow \sim(A \Rightarrow A)$$

$$A \wedge B =: \neg((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg B)$$

$$A \vee B =: (A \rightarrow B) \rightarrow B$$

$$A \leftrightarrow B =: (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Аксиомы:

1. $A \Rightarrow A$
2. $A \Rightarrow (B \wedge C) \leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
3. $A \wedge (A \Rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge B$
4. $(A \vee B) \Rightarrow C \leftrightarrow (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$
5. $(A \Rightarrow A) \rightarrow A \leftrightarrow A$
6. $A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow C) \rightarrow \neg B$
7. $\sim \lceil A \rightarrow \rceil \rfloor x$
8. $(A \Rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B).$

Правила вывода: $A, A \rightarrow B \vdash B$; $A, A \Rightarrow B \vdash B$.

8.3.2. Логика без неподвижных точек \mathbf{LG}_{∞}^*

Теперь поставим следующий вопрос (см. [Карпенко 1993а]): можно ли «расширить» свойства импликации $x \rightarrow y$ в матрице

$$\mathfrak{M}_{\infty}^L = \langle [0,1], \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$$

для бесконечнозначной логики Лукасевича \mathbf{L}_{∞} таким образом, чтобы посредством этой новой операции и $\sim x$ определить операции $\lceil x$ и $x \Rightarrow y$ из \mathbf{G}_{∞} .

Рассмотрим бесконечнозначную матрицу

$$\mathfrak{M}_{\infty}^* = \langle [0,1]^*, \sim, \rightarrow^*, \{1\} \rangle,$$

где $[0,1]^*$ есть множество таких рациональных чисел из отрезка $[0,1]$, из которого элиминированы все числа с четным знаменателем. Операции \sim, \rightarrow^* определяются следующим образом:

$$\sim x =: 1-x;$$

$$x \rightarrow^* y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x = y < 1 \\ x \rightarrow y, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 1. Операции $\lceil x$ и $x \Rightarrow y$ определимы в матрице \mathfrak{M}_{∞}^* .

Это можно сделать следующим образом:

$$x \rightarrow y =: \sim((y \rightarrow^* x) \rightarrow^* \sim(y \rightarrow^* x)) \rightarrow^* (x \rightarrow^* y),$$

$$\top x =: \sim((x \rightarrow^* x) \rightarrow x),$$

$$x \Rightarrow y =: J_1(x \rightarrow y) \vee y,$$

где $J_1 x = \top \sim x$ и $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$.

Имеет смысл определить операцию $x \rightarrow^* y$ в терминах хорошо известных операций. Пусть

$$\mathfrak{M}_\infty^* = \langle [0, 1]^*, \top, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle.$$

Тогда имеет место следующая

Лемма 2. Операция $x \rightarrow^* y$ определима в матрице \mathfrak{M}_∞^* .

Это можно сделать следующим образом:

$$x \rightarrow^* y = ((J_1(x \equiv y) \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y)) \vee \top x,$$

где $x \equiv y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ и $x \wedge y = \sim(\sim x \vee \sim y)$ ¹⁷.

Из леммы 1 и леммы 2 следует, что матрицы \mathfrak{M}_∞^* и \mathfrak{N}_∞^* задают одну и ту же логику, которую обозначим посредством \mathbf{LG}_∞^* .

Обратим внимание на весьма существенное свойство построенных матриц, которое заключается в том, что они не содержат неподвижных точек относительно \sim , т.е. $\sim x \neq x$. Из этого следует, что в основе алгебры для \mathbf{LG}_∞^* лежит интенциональная решетка [Belnap and Spencer 1966], которая представляет собой решетку де Моргана без неподвижных точек (о применении см. в [Anderson and Belnap 1975, ch. 3, § 18]).

Интересно сравнение матричных логик \mathbf{LG}_∞ и \mathbf{LG}_∞^* . Очевидно, что каждая тавтология \mathbf{LG}_∞ является тавтологией \mathbf{LG}_∞^* , но имеются различные тавтологии из \mathbf{LG}_∞^* , которые не являются тавтологиями \mathbf{LG}_∞ , например, формула

$$\sim((p \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow p))$$
¹⁸.

¹⁷ Подробное доказательство обеих лемм см. в [Карпенко 1996а].

¹⁸ Для справедливости заметим, что уже после публикации статьи [Карпенко 1993а] мы обратили внимание на матричную логику $S_{[N]}$ (см. [Rescher 1969: 47]). Здесь вначале определяется система S_N , операции которой задаются на множестве рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ следующим образом:

$$\sim x = 1 - x, \quad x \vee y = \max(x, y), \quad x \wedge y = \min(x, y),$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq y \\ 0, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Логическая матрица для логики $S_{[N]}$ есть матрица для S_N без истинностного значения $1/2$. Здесь как раз и появляется формула

$$\sim((p \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow p)),$$

которая имеет место в $S_{[N]}$, но не в S_N .

8.4. Модальные логики

Класс модальных логик устроен даже сложнее, чем класс суперинтуиционистских логик (*si*-логик), хотя что может быть сложнее континуума? Здесь мы рассмотрим наиболее интересные льюисовские модальные системы и определим важную тенденцию развития современной логики.

8.4.1. К.И. Льюис и К. Гёдель

В [Lewis 1912] К.И. Льюис (1883–1964) строит новую теорию логического следования взамен теории материальной (классической) импликации, изложенной в «*Principia Mathematica*». Исходным мотивом Льюиса было избавиться от так называемых *парадоксов материальной импликации*. Под последними в первую очередь рассматривались формулы

$$p \supset (q \supset p) \text{ и } p \supset (\sim p \supset q),$$

которые содержательно означали следующие принципы: «Истина имплицитно вытекает из чего угодно» и «Противоречие имплицитно утверждает все что угодно». В классической S_2 и интуиционистской **Int** логиках эти принципы общезначимы. В итоге материальная импликация была заменена Льюисом на *строгую* импликацию \rightarrow , определение которой потребовало введения модальных операторов \Diamond (возможно) и \Box (необходимо):

$$p \rightarrow q =: \sim \Diamond(p \wedge \sim q).$$

В работе [Lewis 1918] уделено внимание проблеме исчислений, в которых подобные формулы не выводимы, а введенное там исчисление получило в дальнейшем обозначение S_3 .

Развитие современной модальной логики можно датировать началом 30-х годов XX века, когда вышла книга [Lewis and Langford 1932], содержащая формулировки модальных логических систем S_1 – S_5 , в дальнейшем названных *льюисовскими*, и двухстраничная статья К. Гёделя [Gödel 1933], в которой приводится формулировка льюисовских систем S_4 и S_5 в стиле, ныне называемом *гёделевым*, и утверждается *погружаемость* интуиционистской логики **Int** в S_4 *переводом*, при котором интуиционистские связки интерпретируются соответствующими классическими, но при этом используется усиливающий оператор \Box , который навешивается на пропозициональные переменные и усиливает импликацию.

Работа Гёделя имела фундаментальное значение для дальнейшего развития логики. Во-первых, оказалось, что исчисление, строящееся как ограничение классической логики (отбрасывание ряда неприемлемых формул), на самом деле может оказаться расширением последнего: льюисовские системы строятся как расширение классической логики S_2 , т.е. к аксиоматизации S_2 добавляются характеристические аксиомы для модальных операторов¹⁹. Во-вторых, погружаемость одних логических систем в другие означала сходство способов рассуждения различных логических систем, а также обладание порой весьма важными одинаковыми свойствами. В данном случае последнее означало то, что si -логики и модальные логики стали изучаться параллельно. Систематическое исследование тесной связи между модальными логиками и si -логиками было начато в классической работе Дж. Маккинси и А. Тарского [McKinsey and Tarski 1948].

8.4.2. Некоторые модальные логики

В обзоре [Bull and Segerberg 1984] отмечается, что за последние годы появилось астрономическое число модальных логик, при этом имеются в виду логики, которые получили «персональное» обозначение. В этой работе приводится список из 15 модальных логик (р. 21-22). В [Chagrov and Zakharyashev 1997: 116] приводится список из 30 нормальных модальных логик, причем 5 из них задают классы логик. Некоторые из этого списка будут полезными для нас.

Модальная логика является *нормальной* т.т.т., когда она включает все тавтологии S_2 и аксиому

$$K. \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$$

и замкнута относительно подстановки для переменных, *modus ponens* и правила Гёделя: если $\vdash A$, то $\vdash \Box A$. Логика называется *квазинормальной*, если она не удовлетворяет правилу Гёделя.

Рассмотрим еще несколько модальных аксиом:

$$T. \Box p \supset p,$$

$$4. \Box p \supset \Box \Box p,$$

$$B. p \supset \Box \Diamond p,$$

$$Grz. \Box(\Box(p \supset \Box p) \supset p) \supset p.$$

$$W. \Box(\Box p \supset p) \supset \Box p \text{ (аксиома Лёба).}$$

¹⁹ Напомним, что подобный метод аксиоматизации был затем использован при аксиоматизации многозначных логик (см. выше раздел 6.3).

Логика **S4** есть **KT4**; логика **S5** есть **KT4B**; **KT4Grz** = **KGrz** есть логика Гжегорчика **Grz** (в первоначальной аксиоматике она представлена в [Grzegorchyk 1967]). Логика **Grz** вызвала особый интерес, поскольку является наибольшим нормальным расширением модальной логики **S4**, в которое погружается интуиционистская логика **Int** посредством перевода Гёделя–Тарского–Мак-Кинси. **K4W** = **KW** есть логика Гёделя–Лёба **GL** – логика доказуемости, в которой оператор необходимости понимается как *формальная доказуемость* в некоторой аксиоматической теории подобной арифметике Пеано *PA*. Логика **GL** полна относительно арифметической интерпретации: модальная формула *A* доказуема в **GL** т.т.т., когда *A* есть *PA*-тавтология [Solovay 1976].

Заметим, что в [Dummett and Lemmon 1959] по характеристической матрице Яськовского для **Int** построена характеристическая матрица для **S4**. Очень простая континуальная характеристическая матрица для **S5** сконструирована А. Прайором [Prior 1957a]²⁰.

В [Fine 1974] доказывается континуальность множества расширений **S4** (однако, это уже после результата Янкова о континуальности класса *si*-логик [Янков 1968]), Результаты, аналогичные тому, что между **Int** и любой *si*-логикой находится континуум логик [Кузнецов 1971], справедливы и в модальном случае. Так, континуален любой интервал между модальной логикой **L** и ее собственным расширением при **L** = **K**, **L** = **K4**, **L** = **S4**, **L** = **Grz**, **L** = **GL** и во многих других случаях.

Оказывается, континуальность классов логик является не исключением, а нормой. См. об этом специальную статью И.А Горбунова и М.Н. Рыбакова [Горбунов и Рыбаков 2007].

²⁰ В качестве истинностных значений берутся все 1-0-последовательности счетной длины, т.е. булевы вектора, состоящие из вхождений 1 – «истина» и 0 – «ложь» (а их континуум – 2^{\aleph_0}), операциями являются покомпонентные булевы операции (подробно об этом см. в разделе 10.5), а операторы возможности \Diamond и необходимости \Box определяются следующим образом:

$$\Diamond p = \begin{cases} \langle 0,0,0 \rangle, & \text{если } p \text{ есть } \langle 0,0,0 \rangle \\ \langle 1,1,1 \rangle & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\Box p = \begin{cases} \langle 1,1,1 \rangle, & \text{если } p \text{ есть } \langle 1,1,1 \rangle \\ \langle 0,0,0 \rangle & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Строгое доказательство того факта, что эта модель является *точной* моделью для **S5**, дано в [Massey 1972].

8.4.2.1. Табличность и предтабличность

Как и в случае с интуиционистской логикой **Int**, одним из первых вопросов для новых логических систем является вопрос об их *табличности*. Логика является табличной, если она характеризуется конечными моделями (шкалами, алгебрами, матрицами и т.д.). Дж. Дугунджи [Dugundji 1940], используя метод К. Гёделя для **Int** (см. выше), показал, что льюисовские системы, включая **S1** – **S5**, являются бесконечнозначными логиками, т.е. не имеют конечной характеристической матрицы. Затем С. Скроггс [Scroggs 1951] доказал, что логика **S5** является *предтабличной*, т.е. любое ее собственное (нормальное) расширение характеризуется конечной матрицей с единственным выделенным значением²¹. Напомним, что именно таким образом была получена четырехзначная логика **V2** (см. выше раздел 5.4.3.1).

Понятия табличности и предтабличности тесно связаны и последнее понятие в явном виде введено А.В. Кузнецовым [Кузнецов 1971] для того, чтобы на этом пути подойти к решению проблемы разрешимости табличности. Если имеется простое описание всех предтабличных логик в некотором классе расширений, то мы имеем эффективный критерий табличности для этого класса. Конечно, хотелось бы иметь *алгоритм*, который по исчислению выдавал бы, является логика конечнозначной или нет.

К сожалению, в общем случае никакого эффективного критерия табличности не существует. Однако, если мы ограничимся достаточно сильными логиками, например, классом нормальных расширений **S4**, то проблема табличности оказывается разрешимой. Описание всех предтабличных логик в этом классе дано Л.Л. Максимовой [Максимова 1975] (таковых оказалось 5). А еще ранее Л.Л. Максимова установила (1972), что в классе *si*-логик содержится в точности три предтабличных логики, одна из которых есть логика Гёделя–Даммита G_{∞} .²² Естественно, возникает вопрос о предтабличных расширениях логики Лукасевича L_{∞} . Из работы [Beavers 1993b: 261] следует, что существует только одно предтабличное расширение L_{∞} . Обозначим эту логику посредством L_{Σ} (мы рассмотрим ее в разделе 10.6.1).

Значительное продвижение в исследовании предтабличных модальных логик было сделано в [Blok 1980]. Оказалось, например, что в нормальных расширениях модальной логики **K4** имеется

²¹ См. также [Мини 1974, § 10].

²² Еще ранее предтабличность G_{∞} была установлена в [Dunn and Meyer 1971].

континуум предтабличных логик (что, кстати, лишает возможности на этом пути получить прямое решение открытой до сих пор проблемы табличности нормальных расширений **K4**); а в нормальных расширениях модальной логики доказуемости **GL** имеется ровно счетное множество предтабличных логик.

Свойство табличности играет существенную роль при изучении класса конечно аппроксимируемых логик, которые характеризуются классами (в общем случае бесконечными) конечных шкал Крипке. Каждая такая логика есть пересечение множества табличных логик, т.е. может быть аппроксимируема возрастающей последовательностью табличных логик, как это и было впервые показано в случае с **Int** (см. выше раздел 4.3.2). Класс финитно аппроксимируемых логик исключительно важен в силу свойства разрешимости для конечно аксиоматизируемых логик и включает почти все стандартные модальные и *si*-логики.

8.4.3. Шкалы Крипке и принцип соответствия

Ввиду тесной связи между модальной логикой **S4** и интуиционистской логикой **Int**, первоначальной семантикой для **S4** и ее расширений была алгебраическая, которая уже систематически исследовалась Дж. Мак-Кинси в 1941 г. Модальные алгебры для многих модальных систем были введены Е. Леммоном [Lemmon 1966]. Здесь особое место занимает работа [Jónsson and Tarski 1951]. Как отмечается в [Bull and Segerberg 1984: 10], если бы эта работа получила известность после ее публикации, то история модальной логики была бы другой. В этой работе была расширена теорема представления Стоуна на булеву алгебру с операторами, при этом в явном виде введены шкалы как реляционные представления модальных алгебр.

Одной из наиболее привлекательных черт семантики возможных миров, получившей необычайно широкое признание, является обнаружение простой связи между существованием модальных аксиом и обычными свойствами отношения достижимости между мирами. Такая связь положена в основание *теории соответствия*: какие классы моделей (шкал) Крипке можно описать модальными формулами, какие — формулами классической логики первого порядка. В действительности, теория соответствия выросла из весьма простого наблюдения, сделанному в начале 70-х годов: **T**-аксиома $\Box p \supset p$ истинна на шкале Крипке $\langle W, R \rangle$ т.т.т., когда *R рефлексивно*. Здесь «истинна на шкале» обозначает истинность во всех мирах при всех приписываниях значений пропозициональным переменным. Аксиома **4** эквивалентна *транзитивности*, а аксиома **B** —

симметричности. Отсюда логика **K4** характеризуется классом всех транзитивных шкал, логика **S4** — классом всех транзитивных и рефлексивных шкал и логика **S5** характеризуется отношением эквивалентности на множестве миров W . Тогда модальная логика **K** называется *базисной* и примечательна тем, что в семантике Крипке для модальных логик на отношение достижимости не накладывается никаких ограничений. Другими словами, множество формул логики **K** общезначимо во всех шкалах Крипке. Что касается логики Гжегорчика **Grz**, то она характеризуется классом всех финитных частично-упорядоченных шкал, а логика доказуемости **GL** характеризуется транзитивными и иррефлексивными (т.е. строго-упорядоченными) шкалами и при этом не содержащими бесконечных обрывающихся цепей.

В [Van Benthem 1984] приведена таблица соответствий для некоторых интересных формул. Вообще при таком подходе модальная формула определяет ограничения на отношения достижимости в шкалах Крипке. Некоторые из этих ограничений являются первопорядково определяемыми, другие нет. Например, в этой же работе показано, что свойства шкал Крипке, определяемых аксиомой Лёба, не являются первопорядково определяемыми.

С философской точки зрения теория соответствия может быть описана как нахождение того, что может дать нам семантика возможных миров.

Исследования в области модальной логики к началу XXI века естественным образом оказались разбиты на два уровня (два слоя, два направления): пропозициональный мономодальный и предикатно-кванторный вместе с многомодальным. Основные достижения в области пропозициональной модальной логики собраны в фундаментальной монографии [Chagrova and Zakharyashev 1997] и большой обзорной статье [Zakharyashev, Wolter and Chagrova 2001]. Прекрасным введением в первопорядковую модальную логику является книга [Fitting and Mendelsohn 1998]. Рассматриваются технические и философские аспекты квантификации и тождества. Представлены гильбертовские и табличные системы.

8.4.4. Важное отступление

Исследование различных свойств, не какой-то избранной логики, а *семейства* логик становится глубоко специализированной областью логических исследований, что потребовало развития совершенно новых методов.

Важнейшим этапом современных исследований является изучение *решеточных свойств* классов логик. Уже в статье [Scroggs

1951] впервые было рассмотрено семейство модальных логик, в данном случае нормальные расширения $S5$, в виде *решетки*.

В [Hosoi 1969] установлено, что множество всех si -логик, упорядоченное отношением включения, образует решеточную структуру, а на самом деле — алгебру Гейтинга. Так начался совершенно новый этап в развитии логики — изучение решеточных свойств не отдельной логики, а семейства логик и их классификации.

Аналогично обстоит дело с множеством собственных расширений L_∞ . Элементы этого множества будем называть sl -логиками. Р. Григолия [Григолия 1976] установил, что множество всех sl -логик образует алгебру Гейтинга. Независимо от Григолия этот результат был установлен также в [Komori 1981]. В [Beavers 1993b] было продолжено изучение расширений L_∞ в виде гейтинговой структуры²³.

Для $S4$ подобные исследования впервые были проведены в [Максимова и Рыбаков 1974].

Представление расширений логических систем в виде структурированных множеств (решеток) позволяет устанавливать погружающие операции между такими логическими объектами. Здесь мы уже имеем дело не с погружением одной логической системы в другую, а с погружением решетки одних логик в решетку других логик. Особо отметим теорему Блока–Эсакиа: независимо В. Блок [Blok 1976] и Л.Л. Эсакиа [Эсакиа 1979] (ранее заявлено в тезисах конференции 1974 года) доказали *изоморфизм* решеток si -логик и нормальных расширений Grz . Такие погружения интересны не только с теоретической точки зрения, но могут служить важным инструментом для редуцирования одного класса логик к другому, уже хорошо изученному.

В обзоре [Bull and Segerberg 1984: 22] лишь отмечается, что все нормальные логики образуют дистрибутивную решетку относительно теоретико-множественного включения, которая чрезвычайно сложна. В книге [Chagrova and Zakharyashev 1997] содержится глава 4 под названием «От логик к классам логик», где оговорено,

²³ Конечно, возникает вопрос, почему решетка теорий является брауэровой? Природа этого феномена скорее всего заключается в природе операции присоединения следствий (замыкания), используемой А. Тарским при определении логики (см. выше раздел 4.2; сноска 3). Эта операция является топологическим замыканием, а логики — замкнутые множества, в том числе si -логики и sl -логики. Остается вспомнить связь топовбулевых алгебр, псевдобулевых алгебр (алгебр Гейтинга) и брауэровых алгебр: так, всякая псевдобулева (брауэрова) алгебра является алгеброй открытых (замкнутых) элементов подходящей топовбулевой алгебры; во всякой топовбулевой алгебре совокупность открытых (замкнутых) элементов образует псевдобулеву (брауэрову) алгебру.

что классы расширений модальных логик рассматриваются как решетки. Здесь явно обозначена тенденция к изучению не отдельных логик, а огромных (зачастую континуальных) классов логик и развитие общих методов исследования этих классов. Наконец, обзор [Zakharyashev, Wolter and Chagrova 2001] начинается с представления решетки расширений логики **K**. Такой подход, отмечается авторами в предисловии, дает возможность использовать мощный технический аппарат, который позволяет ставить вопросы типа «что является ко-атомами в решетке?» (т.е. какие логики являются максимально непротиворечивыми?), или «имеются ли бесконечные обрывающие цепи?» (т.е. являются ли все логики в этом семействе конечно аксиоматизируемыми?).

Таким образом, от изучения свойств конкретной логики мы переходим к изучению свойств *решетки логик*. Развитие этой темы см. в конце последнего раздела в *Приложении*.

8.5. Релевантные логики

Литература по релевантным логикам столь обширна и разнообразна, что авторы фундаментальной статьи [Dunn and Restall 2002] даже не называют ее обзором. Классическими монографиями являются следующие: [Anderson and Belnap 1975] и [Anderson, Belnap and Dunn 1992].

Мы в основном сконцентрируемся на уже не раз упоминавшейся нами пропозициональной системе релевантной логики **R** и на её расширении **RM**, которое имеет ряд общих черт с логикой Гёделя–Даммита G_{∞} .

8.5.1. Критерий релевантности и логика **R**

Модальные логики не решились проблем с парадоксами импликации и в свою очередь были выявлены *парадоксы строгой импликации*. Аналогами предыдущих двух парадоксов (см. 8.4.1), но в более очевидной форме, являются следующие формулы:

$$p \rightarrow (q \rightarrow q) \text{ и } (p \wedge \sim p) \rightarrow q.$$

Обратим внимание, что антецеденты и консеквенты этих формул не имеют общих переменных. В 1960 г. Н.Д. Белнап предложил критерий релевантности, который должна выполнять «хорошая» система логического следования **R**: *если $A \rightarrow B$ есть теорема*

R, тогда существует некоторая пропозициональная переменная p , которая входит как в A , так и в B [Belnap 1960]²⁴.

Стандартной аксиоматизацией системы **R** является следующая (см. [Dunn 2000: 18]):

- R1. $p \rightarrow p$
- R2. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q))$
- R3. $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$
- R4. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
- R5. $(p \wedge q) \rightarrow p$
- R6. $(p \wedge q) \rightarrow q$
- R7. $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$
- R8. $p \rightarrow (p \vee r)$
- R9. $q \rightarrow (p \vee q)$
- R10. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
- R11. $(p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- R12. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- R13. $p \rightarrow \neg\neg p$
- R14. $\neg\neg p \rightarrow p$.

Правила вывода:

- 1. *Modus ponens*,
- 2. *Подстановка*,
- 3. $A, B \vdash A \wedge B$ (правило адъюнкции)²⁵.

²⁴ Заметим, что для доказательства Белнап использовал 8-элементную решетку. Критерий релевантности был независимо открыт также В.В. Донченко [Донченко 1963].

²⁵ Первая аксиоматизация системы **R** появилась в [Belnap 1967] посредством добавления аксиомы (Demodaiser) $p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ к системе следования **E**. Последняя является результатом модификации и реконструкции А. Андерсоном Н. Белнапом (см. [Anderson and Belnap 1975]) системы **Π'** с так называемой *сильной импликацией*, сформулированной В. Аккерманом в 1956 г. Система **E** является одновременно релевантной и модальной логикой. В действительности, определяя $\Box p =: (p \rightarrow p) \rightarrow p$, находим, что **E** имеет нечто похожее на модальности в **S4** (см. там же, §4.3 и §10). Импликативный фрагмент **R** (аксиомы R1 – R4) обозначается посредством **R_→**. Известно, что **R_→** может быть аксиоматизирован посредством следующих аксиом: (R4), $(p \rightarrow q) \rightarrow$

Примечательным свойством релевантных систем является то, что правило дизъюнктивного силлогизма (Dis)

$$A, \neg A \vee B \vdash B^{26}$$

для них не имеет места, поскольку соответствующая формула

$$A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow B$$

не является теоремой **E** и **R**.

Если мы добавим «парадоксальную» формулу $p \rightarrow (q \rightarrow p)^{27}$ к **R**, то получим классическую логику **C**₂. Если в **R** отбросим аксиому $\neg\neg p \rightarrow p$, то получим конструктивную (интуиционистскую) версию релевантной логики [Dunn 2000: 18]²⁸. Добавление к этой версии $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ приводит к интуиционистской логике **Int**. Здесь правило адъюнкции заменяется на аксиому $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$.

Мы уже знаем (см. выше раздел 5.4.4), что имеется четырехзначная матрица Смайли $\mathfrak{M}_{E_{fde}}$, которая является характеристической для первопорядкового следования в **E** и **R**. Интересный результат содержится в [Swirydowicz 2008]: **R** имеет континуальное множество предтабличных расширений.

$((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)), ((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$ и (Demodaiser). Тогда сильная импликация E_{\rightarrow} аксиоматизируется посредством отбрасывания (Demodaiser) из **R**_→.

Остается добавить, что на самом деле первой работой, в которой изучается релевантная логика, является статья И.Е. Орлова [Орлов 1928]. По крайней мере, в [Попов 1978] показано, что импликативно-негативный фрагмент системы Орлова есть в точности такой же фрагмент системы **R**.

²⁶ Уже в [Lewis and Langford 1932] показано, как из $p \wedge \neg p$ с помощью правила Dis выводима любая формула q . В современной нотации это выглядит так:

- (1) $p \wedge \neg p$ посылка
- (2) p \wedge -удаление
- (3) $\neg p$ \wedge -удаление
- (4) $\neg p \vee q$ \vee -введение
- (5) q из 2 и 4 по правилу Dis.

Интересно, что общезначимость правила Dis К.И. Льюисом никогда не подвергалась сомнению (см. [Lewis and Langford 1932: 242-243]).

²⁷ Релевантисты называют эту формулу «позитивным парадоксом».

²⁸ Отметим, что в [Смирнов 1972] построено «абсолютное исчисление предикатов», которое после осознания того, что импликативный фрагмент этого исчисления есть импликативный фрагмент **R**, было обозначено в [Смирнов 1979] как **RA**. В секвенциальном виде **GRA** – это интуиционистская система в генценовской формулировке без структурных правил утончения. Показывается, как от **GRA** можно элегантно перейти к минимальной интуиционистской логике (о ней чуть ниже), к самой интуиционистской и к классической. В гильбертовском виде **RA** есть **R** без закона дистрибутивности и без закона снятия двойного отрицания.

8.5.2. Некоторые необычные свойства

Казалось бы, все проблемы решены и наконец-то формализована подходящая теория логического следования. Более того, в [Dunn 1966] (и независимо в [Максимова 1967]) проведена алгебраизация системы **R** посредством введения моноида Де Моргана и показано, что алгебра Линденбаума для **R** есть в точности моноид Де Моргана. Эта структура есть соединение дистрибутивной решетки Де Моргана и абелева моноида с дополнительными условиями, одним из которых является неидемпотентность моноидной операции \circ ($x \leq x \circ x$)²⁹. Важным является то, что моноиды Де Моргана резидуированы, т.е. там относительно операции \circ имеется резидуальная операция \rightarrow :

$$x \circ y \leq z \text{ т.т.т., когда } x \leq y \rightarrow z.$$

Хотя стоит заметить, что здесь эта операция есть $\neg(y \circ \neg z)$. В свою очередь, $x \circ y = \neg(x \rightarrow \neg y)$.

Однако построить крипковскую семантику для **R** не удавалось, пока в 1973 г. не была изобретена *тернарная семантика Крипке*, т.е. с тернарным отношением достижимости (см. [Роутлей и Мейер 1981]). Стоит сказать, что и по сей день ее интуитивное содержание остается неясным.

С самого появления системы **R** много внимания было уделено проблеме разрешения (см. обзор этой проблематики в [Dunn and Restall 2002, section 4]). Интерес подогревался еще тем, что в [Harrop 1965] было высказано утверждение, что все философски интересные пропозициональные логики должны быть разрешимы.

Оказалось, эта проблема легко решается для различных фрагментов **R**: для **R** _{\rightarrow} и **E** _{\rightarrow} это было сделано в 1959 г. С. Крипке который представил указанные логики в виде секвенциальных исчислений. В 1961 г., применяя метод Крипке, была доказана разрешимость импликативно-негативного фрагмента **E** (N. Belnap and J. Wallace), что непосредственно распространялось на такой же фрагмент **R**, а в 1966 г. была доказана разрешимость **R** без закона дистрибутивности (R. Meyer)³⁰. Более того, в 1968 г. было показано, что система **R** с аксиомой $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (об этой системе в следующем разделе), разрешима (R. Meyer).

Однако совершенно неожиданно появилось доказательство того, что системы **E**, **R** (и родственные им) *неразрешимы* [Urquhart 1984]. А затем оказалось, что *интерполяционное свойство* —

²⁹ Специально моноидам де Моргана посвящена статья [Slaney 1989].

³⁰ Независимо этот же результат был получен В.М. Поповым [Попов 1978].

фундаментальное свойство всех «хороших» логических систем³¹ — для **E** и **R** не имеет места [Urquhart 1993].

И тем не менее, основополагающая идея о том (начиная с матрицы Смайли), что четырехзначная семантика может оказаться адекватной для **R**, была наконец реализована в [Mares 2005], где была построена для **R** четырехзначная *окрестностная* семантика Крипке.

8.5.3. Логика **RM**

Логика **RM** считается «лабораторией релевантной логики» (К. Мейер), а по мнению А. Аврона: «Система **RM** наиболее интересная (и на наш взгляд, также самая важная) среди логик, разработанных школой Андерсона и Белнапа» [Avron 1987: 939]. По существу, система **RM** играет ту же роль среди релевантных логик, что и система **S5** среди модальных логик.

Как мы уже знаем, добавление формулы

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

к **R** дает классическую логику. Однако можно ослабить эту формулу за счет подстановки p вместо q . Такая формула обозначается посредством **M**, а система **R + M** получила название логики **RM** (**R-Mingle**)³².

В начале 60-х годов началось активное изучение системы **RM** и в 1967 г. К. Мейером было установлено (см. [Anderson and Belnap 1975, §29.3]), что характеристической матрицей для **RM** является бесконечнозначная матрица Т. Сугихары, предложенная для элиминации некоторых парадоксов материальной импликации [Sugihara 1955]:

$$\mathfrak{M}_{\infty}^S = \langle V, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, D \rangle, \text{ где}$$

$$V \text{ есть } \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\neg x = -x,$$

³¹ В 1957 г. В. Крейг (W. Craig) доказал теорему об интерполяции в классической логике предикатов: если выводимо $A \Rightarrow C$, то можно построить формулу B , содержащую лишь термины, входящие и в A , и в C , такую, что выводимы $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$. Эта теорема имеет место для рассмотренных выше логик **Int**, **K**, **K4**, **S4**, **Grz**, **S5**, и **GL**. Вызвало удивление, что интерполяционным свойством не обладают конечнозначные логики Лукасевича \mathbf{L}_n и сама логика \mathbf{L}_{∞} (см. [Krzystek and Zachorowski 1977]). Но здесь как раз ничего удивительного нет, учитывая чисто теоретико-числовую природу \mathbf{L}_n (см. выше раздел 8.1).

³² Эта аксиома впервые изучалась в [Ohnishi and Matsumoto 1962], а система **RM** изобретена С. Мак-Коллом (S. McCall) и М. Данном (M. Dunn).

$$x \vee y = \max(x, y),$$

$$x \wedge y = \min(x, y),$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} \neg x \vee y, & \text{если } x \leq y \\ \neg x \wedge y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

Множеством выделенных значений D является множество натуральных чисел³³.

Заметим, что матрица \mathfrak{M}_3^S есть не что иное, как характеристическая матрица M_3 для трехзначной логики **RM3** (см. выше раздел 3.5.2.1), которая аксиоматизируется посредством добавления к **R** следующих аксиом [Brady 1982]:

$$1. (\neg p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$2. p \vee (p \rightarrow q).$$

Доказательство полноты **RM** дает важное следствие. Предположим, высказывание A содержит n пропозициональных переменных и в матрице \mathfrak{M}_n^S V_n есть $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$. Тогда

$$\vdash_{\mathbf{RM}} A, \text{ т.т.т., когда } A \text{ общезначима в } \mathfrak{M}_n^S.$$

Опираясь на это следствие, Мейер доказывает разрешимость **RM** следующим образом. Каждое высказывание A имеет фиксированное конечное число n пропозициональных переменных. Исходя из указанного следствия, для данного A , $\vdash_{\mathbf{RM}} A$, т.т.т., когда A общезначима в \mathfrak{M}_n^S , т.е. истинна в каждой \mathfrak{M}_n^S интерпретации. Таких интерпретаций $(2n)^n$; проверка A на каждой из них конечна. Эта конечная проверка отбрасывает каждую не тавтологию A . Таким образом, система **RM** разрешима.

В [Dunn 1970] вводится понятие идемпотентного моноида Де Моргана посредством усиления $x \leq x \circ x$ до $x \leq x \circ x$ и дается алгебраическое доказательство полноты **RM**. Здесь же показывается, что **RM** есть предтабличная логика, как **S5** и **G_∞**, а в статье [Dunn and Meyer 1971] представлено погружение **G_∞** в **RM**, откуда следует, что их множество теорем в импликативно-дизъюнктивно-конъюнктивном языке совпадают (см. также [Avron 1986]). В силу этого некоторые авторы указывают на взаимоотношение **G_∞** с релевантными логиками. Однако **RM** не является релевантной логикой.

³³ Матрицы Сугихары исследуются в [Tokarz 1980] и специально в [Mortenson 1982], а также под названием «алгебр Сугихары» в [Font and Péres 1992].

Добавление к **R** такой «безобидной» формулы, как $p \rightarrow (p \rightarrow p)$, резко меняет ситуацию: свойство релевантности не имеет места для **RM**. Как показал Р. Мейер в 1971 г. (см. [Anderson and Belnap 1975: 429]), в **RM** выводима формула

$$\neg(p \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow q)^{34}.$$

Также выводим закон линейности

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p),$$

который, как мы знаем, не является интуиционистской формулой, в то время как позитивный фрагмент логики **R** является таковым.

8.5.3.1. Логики $\mathbf{RM}_{\rightarrow, \sim}$ и $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$

Особый интерес представляет импликативно-негативный фрагмент трехзначной логики Собочиньского S_3 (см. выше раздел 3.5.2.1), аксиоматизированный в [Sobociński 1952]:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
2. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$
3. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow (\sim q \rightarrow p))$
5. $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p).$

Правила вывода: **MP** и подстановка.

Несколько неожиданно выяснилось (см. [Parks 1972]), что эти аксиомы в точности аксиоматизируют импликативно-негативный фрагмент **RM** (обозначим его посредством $\mathbf{RM}_{\rightarrow, \sim}$), а матрица из M_3 с операциями \sim и \rightarrow является характеристической для аксиом 1–5. Отсюда следует, что $\mathbf{RM}_{\rightarrow, \sim}$ есть трехзначная логика, в то время как **RM** – бесконечнозначная (специально об этом см. также в [Avron 1984]). Отметим также, что в [Попов 1984] впервые представлена секвенциальная формулировка $\mathbf{RM}_{\rightarrow, \sim}$ и оригинальная семантика для нее с двумя видами оценок³⁵.

Еще один удивительный результат относительно **RM** состоит в следующем. В этой же работе Б. Собочинский ставит проблему аксиоматизации импликативного фрагмента S_3 , который обозначим посредством $S_{3\rightarrow}$. После целого ряда работ, начиная с А. Роуза

³⁴ Впервые эта формула была доказана Р. Мейером в 1971 г., а схема доказательства (всего в несколько строк) приведена в [Anderson and Belnap 1975: 429]. На самом деле полное доказательство весьма нетривиально и содержит более 30 шагов (см. [Карпенко И. 2001]).

³⁵ В [Avron 1990] дана секвенциальная формулировка **RM** в виде гиперсеквенций.

[Rose 1953b], наконец была получена следующая независимая аксиоматизация $S_{3\rightarrow}$ [Meyer and Parks 1972]: в приведенной только что аксиоматизации аксиомы (4) и (5) заменяются на аксиому

$$U. (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r).$$

В этой же работе Р. Мейер и З. Паркс показывают, что $S_{3\rightarrow}$ есть в точности импликативный фрагмент **RM**, который обозначается посредством **RM**_→. Заметим, что формула **U** не является интуиционистской формулой. Таким образом, добавление формулы **U** к **R**_→ (такая система обозначается посредством **RM0**_→ и очевидно, что все ее аксиомы являются интуиционистски значимыми) не образует импликативного фрагмента логики **RM** (!), т.е. **RM** не является консервативным расширением **RM0**_→.

Остается добавить, что формула **U** сыграет решающую роль при построении максимальной булевой решетки импликативных логик (см. ниже Приложение).

Новый результат относительно **RM** содержится в [Blok and Raftery 2004]. Оказывается, что в отличие от **R** здесь можно определить связку дизъюнкции \vee в терминах \wedge и \rightarrow без использования отрицания \neg . В этой же работе содержится обширная литература об **RM** и её фрагментах.

Остается только добавить, что между **R** и **RM** содержится континуум логик, удовлетворяющих критерию релевантности (см. [Dziobiak 1983]).

8.6. Паранепротиворечивая логика S_ω и иерархия ее расширений

В разделе 3.5, где мы рассматривали трехзначные паранепротиворечивые логики (в дальнейшем **PL**), указывалось, что в таких логиках блокируется выводимость $A, \sim A \vdash B$ и, как следствие, закон Дунса Скота

$$p \supset (\sim p \supset q).$$

Отсюда также следует, что релевантные логики в силу критерия релевантности являются подклассом **PL**. В первой обстоятельной книге по **PL** [Priest, Routley and Norman 1989] подробно рассмотрено возникновение **PL** и ее различные направления. См. также обзор в [Priest 2002]. Первый обзор на русском языке опубликован в [Ишмуратов, Карпенко и Попов 1989]. Имеется справочник по паранепротиворечивым логикам [Béziau, Carnielli and Gabbay (eds), 2007].

Обратим внимание на то, что исторически первой законченной системой **PL** является *минимальная интуиционистская логика* И. Йохансон **J** (см. [Johansson 1936]), которая получается из интуиционистской логики **Int** (см. выше раздел 8.2.2) посредством отбрасывания из нее закона Дунса Скота. Однако уже Н.А. Колмогоров [Колмогоров 1925], принимая предпринятую Э. Брауэром критику традиционной логики, обнаруживает в последней еще один уязвимый, но обойденный критикой Брауэра логический принцип, а именно закон Дунса Скота. Как указывает Колмогоров, эта аксиома «не имеет и не может иметь интуитивных оснований как утверждающая нечто о последствиях невозможного». Таким образом, рождение первой паранепротиворечивой системы логики (импликативно-негативной) следует датировать 1925 г.

8.6.1. Логика C_ω и ее свойства

Одной из наиболее известных паранепротиворечивых систем можно считать логику C_ω Ньютона да Косты, построенную им в [Da Costa 1963] (см. в особенности [Da Costa 1974]), и которая считается самой «слабой» **PL**. C_ω получается из аксиоматизации Клини классической логики C_2 (см. выше раздел 1.4) путем замены аксиомы приведения к абсурду (аксиома 9) на закон исключенного третьего. От системы Клини систему C_ω отличает лишь одна аксиома, но за счет ослабления отрицания становится не выводим, например, закон Пирса

$$((A \supset B) \supset A) \supset A,$$

который сам не содержит отрицания, но для вывода которого существенным образом используется аксиома 9, т.е. позитивный фрагмент C_ω совпадает с позитивным фрагментом **Int**, который обозначим посредством Int^+ . Тогда аксиоматизацией C_ω является Int^+ (аксиомы 1–8 в аксиоматизации Клини) и добавляются аксиомы:

$$C_\omega 1. A \vee \sim A$$

$$C_\omega 2. \sim\sim A \supset A^{36}.$$

Единственным правилом вывода является МР.

³⁶ Интересно, что Д. Батенс [Batens 1980] формулирует паранепротиворечивую систему **PI** следующим образом. Берется позитивный фрагмент классической логики, т.е. Int^+ плюс закон Пирса, и добавляется только одна аксиома с отрицанием: $A \vee \neg A$.

Из логики C_ω получается трехзначная **PCont** посредством добавления к первой закона Пирса, законов Де Моргана, выразимости импликации через другие связки и $A \supset \sim\sim A$ (см. выше раздел 3.5.2).

Логика C_ω не является *финитно тривиализируемой*, т.е. добавление к ней произвольной недоказуемой формулы не влечет выводимости противоречия, как это доказал Н. да Коста. Заметим, что в C_ω не имеет места закон линейности

$$(A \supset B) \vee (B \supset A).$$

Интересно *принципиальное* различие между паранепротиворечивыми логиками **J** и C_ω . В **J**, хотя закон Дунса Скотта не имеет места, но выводим его следующий аналог:

$$\sim A \supset (A \supset \sim B).$$

Заметим также, что для C_ω , как и для **J**, имеется семантика Крипке (см. [Baaz 1986]).

8.6.2. Иерархия паранепротиворечивых систем C_n

На самом деле Н. да Коста строит линейно-упорядоченную иерархию систем C_n (в том числе и предикатных). Аксиоматизация произвольной C_n выглядит следующим образом.

Для $1 \leq n \leq \omega$ пусть A^0 — сокращение формулы $\sim(A \wedge \sim A)$, A^n — сокращение для A^0 , повторенного n раз, а $A^{(n)}$ есть формула $A^1 \wedge A^2 \wedge \dots \wedge A^n$.

Аксиоматизация каждой C_n получается в результате добавления к схемам аксиом для C_ω следующих формул:

$$11-n. B^{(n)} \supset ((A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \sim A))$$

$$12-n. (A^{(n)} \wedge B^{(n)}) \supset ((A \wedge B)^{(n)} \wedge (A \vee B)^{(n)} \wedge (A \supset B)^{(n)}).$$

А. Арруда показала [Arruda 1975], что ни одно из этих исчислений не имеет конечной характеристической матрицы, а в [Fidel 1977] показано, что логики C_n разрешимы.

Также установлено, что каждая C_n строго слабее, чем ее предшественник, т.е. пусть $Th(S)$ обозначает множество теорем исчисления S . Тогда

$$Th(C_n) \subset Th(C_m), \text{ если } 1 \leq m < n < \omega.$$

В отличие от L_ω и G_ω , $Th(C_\omega)$ не является пересечением множества теорем в соответствующей последовательности логик, в данном случае в иерархии C_n . Отыскание такой дедуктивной границы, т.е. $Th(C_{Lim})$, является открытой проблемой по сей день (см. [Carnielli and Marcos 1999]).

Особый интерес представляет логика C_1 , поскольку ею определяются все основные свойства логик в иерархии C_n . Именно с нее начинается изложение **PL** в [Da Costa 1974]. Она аксиоматизируется следующим образом: к аксиомам системы C_ω добавляются

$$B^0 \supset (A \supset B) \supset ((A \supset \sim B) \supset \sim A)$$

$$A^0 \wedge B^0 \supset ((A \wedge B)^0 \wedge (A \vee B)^0 \wedge (A \supset B)^0).$$

Заметим, что в трехзначной паранепротиворечивой логике Сетте P^1 (см. выше раздел 3.5.4) верифицируются все аксиомы для C_1 .

В [Da Costa and Guillaume 1965] выяснилось, что в C_1 выводим закон Пирса, значит она и все C_n содержат позитивный фрагмент классической логики, и все они конечно-тривиализируемы.

8.6.3. Неистинностно-функциональная семантика для паранепротиворечивых логик

В общем случае интерпретация логики **PL** есть отображение (оценка) v из множества формул пропозиционального языка **PL** в множество $\{0,1\}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

$$v(A \vee B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1 \text{ или } v(B) = 1$$

$$v(A \wedge B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 1 \text{ и } v(B) = 1.$$

Случай с импликацией зависит от свойств последней и если она классическая, как в C_1 и **PI**, то

$$v(A \supset B) = 1 \Leftrightarrow v(A) = 0 \text{ или } v(B) = 1.$$

Главный пункт построения семантики для **PL** — это определение условий истинности для отрицания \sim , поскольку для того, чтобы не выполнялась выводимость $A, \sim A \vdash B$, мы могли бы выбрать оценку v такую, которая приписывает p и $\sim p$ значение 1 (и их конъюнкции), в то время как q приписывается значение 0. Это можно достигнуть различными способами. Вот некоторые из них:

$$(1) v(A) = 0 \Rightarrow v(\sim A) = 1$$

$$(2) v(\sim \sim A) = 1 \Rightarrow v(A) = 1.$$

Условие (1) определяет свойства отрицания в системе Д. Батенса **PI**³⁷, а условия (1) и (2) определяют отрицание в C_ω . Для того чтобы получить подобную семантику для C_1 (с которой опять

³⁷ Этой системе двойственна логика Ж.-И. Безье (J.-Y. Béziau), в которой отрицание обладает только свойством

$$(1') v(A) = 1 \Rightarrow v(\sim A) = 0.$$

Заметим, что вместе (1) и (1') определяют классическое отрицание.

же начинается статья [Da Costa and Alves 1977], где предложена семантика для систем C_n , надо добавить еще два условия:

$$(3) \nu(A) = \nu(\sim A) \Rightarrow \nu(A^0) = 0$$

$$(4) \nu(A^0) = \nu(B^0) = 1 \Rightarrow \nu((A * B)^0), \text{ где } * \in \{\vee, \wedge, \supset\}.$$

Логическая истинность определяется обычным образом:

$$\models_{C_1} A \text{ т.т.т., когда для всех оценок } \nu, \nu(A) = 1.$$

В этом же году была построена семантика и для логики C_ω , что потребовало некоторого усложнения в силу свойств импликации в этой системе (см. [Loparić 1986]).

Обратим внимание, что свойства отрицания весьма необычны в рассмотренных паранепротиворечивых логиках, поскольку истинностные условия для $\sim A$ не определяются истинностными условиями A (если $\nu(A) = 1$, то $\nu(\sim A)$ может быть 1 или 0). Такой подход к отрицанию называется *неистинностно-функциональным*, и семантика такого рода является *неистинностно-функциональной* и получила название *семантики оценок*. На этой семантике мы остановимся более подробно в разделе 10.5, а здесь рассмотрим некоторые проблемы, связанные с такой семантикой, для **PL**.

8.6.3.1. Неалгебраизуемость C_1

Покажем, что в C_1 закон Дунса Скота доказуем из следующих двух аксиом (см., например, [Hunter 1998: 17]):

$$1. A \supset (B \supset A)$$

$$2. (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)).$$

Эти аксиомы проходят во всех рассмотренных нами системах **PL**. Если же взять хотя бы ослабленный вариант контрапозиции, который не имеет места в **PL**, то получим закон Дунса Скота:

$$3. (\sim B \supset A) \supset (\sim A \supset B)$$

$$4. A \supset (\sim B \supset A) \text{ — из 1}$$

$$5. A \supset (\sim A \supset B) \text{ — по транзитивности 4,3.}$$

Но отсутствие контрапозиции ведет к весьма нежелательным последствиям. В общем случае оказывается неприменимым правило эквивалентной замены (см. выше раздел 3.5.3 в связи с трехзначной паранепротиворечивой логикой J_3). Например, как отмечается в [Priest 2002: 306], хотя A логически эквивалентно $A \wedge A$, нет гарантии, что отрицания этих формул при данной интерпретации

имеют одно и то же истинностное значение. В общем случае, может случиться так, что $A \vdash B$ и $B \vdash A$, но $\sim A \nvdash \sim B$ и $\sim B \nvdash \sim A$. Немедленным следствием этого является то, что логическая эквивалентность не является конгруэнцией на алгебре формул, т.е. мы не можем построить алгебру Линденбаума.

Этот результат для системы C_1 (и, следовательно, для всех C_n) впервые был получен в [Mortensen 1980], а с появлением аппарата алгебраизуемости логик строго обоснован в [Lewin, Mikenberg and Schwarze 1991].

Долгое время такое свойство **PL** не давало покоя алгебраистам и вообще ставило под сомнение использование отрицания, т.е. ставило вопрос, является ли отрицание *отрицанием* в **PL**? Но в самое последнее время появились настолько сильные обобщения метода Блока–Пигоцци (см. выше раздел 4.5), что этот новый аппарат стал применяться к **PL** и, в частности, к логикам Н. да Косты (см. [Caleiro, Gonçalves and Martins 2009]).

В свою очередь, отсутствие какой-либо интуитивно приемлемой семантики, в том числе семантики Крипке для иерархии C_n , привело к изобретению в [Carnielli 1990] (см. также [Carnielli 2000]) так называемой «*семантики возможной переводимости*» (possible-translations semantics). Важность ее заключается в том, что для логик, не имеющих конечной характеристической матрицы, можно представить адекватный конечный подкласс конечных матриц. Другими словами, исходная логика «разлагается» на несколько простых конечнозначных логик. В случае систем C_n и их вариантов (см. [Carnielli 2000]) достаточно взять фрагменты трехзначной паранепротиворечивой логики J_3 . Самое интересное то, как отмечается в этой статье, что «*семантика возможной переводимости может рассматриваться как обобщение семантики Крипке, в которой мы имеем миры совершенно различной природы*» (р. 150).

8.7. Другие бесконечнозначные логики

Рассмотрение этой темы будет продолжено в следующей главе, когда мы обратимся к нечетким логикам в узко-логическом смысле, и тогда у нас опять появятся логики L_∞ и G_∞ и родственные им. Здесь же только отметим логики, связанные со спецификацией множества истинностных значений, как это уже было сделано в начале этой главы в связи с расширениями L_∞ , а также обратим внимание на тему комбинирования различных логик.

8.7.1. Обобщение логики Поста P_n

В [Rescher 1969] отмечается, что непосредственное обобщение логики P_n (см. выше раздел 5.2.1) на бесконечнозначный случай, как это было сделано с L_∞ , не имеет успеха, поскольку класс тавтологий пуст. Поэтому пошли по пути обобщения понятия алгебры Поста.

Наиболее важной работой здесь является статья [Rasiowa 1973], в которой вводятся алгебры Поста порядка ω^+ и соответствующие системы бесконечнозначной (предикатной) логики. Под ω^+ (или $\omega + 1$) понимается порядковый тип множества натуральных чисел, дополненный наибольшим элементом ∞ , т.е. множество $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$. Теорема представления для таких алгебр доказана в [Maksimova and Vakarelov 1974a] и ими же в [Maksimova and Vakarelov 1974b] вводится адекватная семантика типа реляционной для соответствующих исчислений. Другой вид обобщения на бесконечнозначный случай соответствует алгебрам Поста порядка $\omega + \omega^*$. (см. [Epstein and Rasiowa 1990; 1991]). Здесь множество элементов упорядочено следующим образом:

$$0 = e_0 \leq e_1 \leq e_2 \leq \dots, \dots \leq e_{-2} \leq e_{-1} = 1.$$

Обратим внимание, что впервые подобное множество истинностных значений было введено в [Карпенко 1985] при построении логики L_Z (см. ниже раздел 10.7.1).

8.7.2. Предельные и непрерывные логики

В счетнозначных и континуумзначных логиках особую роль играют различные их подклассы (см. [Кудрявцев 1982: 720]). Таковыми являются в первом случае *предельные логики*, а во втором — *непрерывные логики*. Предельные логики представляют собой счетные замкнутые классы функций из P_{\aleph_0} , содержащие гомоморфные прообразы всех конечнозначных функций. Существует континуум различных предельных логик. Мощность множества предполных классов в предельных логиках может быть равной любому натуральному числу, а также быть счетной или континуальной (см. [Деметрович 1975]).

Естественно, что проблемы, возникающие при изучении функциональных свойств бесконечнозначных логик, становятся гораздо сложнее. Для счетнозначных логик установлена *гиперконтинуальность* множества всех предполных классов³⁸ и найдено

³⁸ Это было уже установлено С.В. Яблонским [Яблонский 1959]. См. также [Марченков 2005].

решение о полноте систем, содержащих множество $P_{\aleph_0}^1$ всех одно-местных функций [Гаврилов 1965]. А. Саломая [Salomaa 1963] показал, что существует континуум штрихов Шеффера в P_{\aleph_0} и, с другой стороны, доказал, что бесконечнозначная логика Лукасевича L_∞ не имеет штриха Шеффера (напомним, что для L_n штрих Шеффера построен).

В непрерывных логиках в качестве логических операций выступают непрерывные функции. Специальный ее вариант положен в основу общей теории моделей для бесконечнозначных предикатных логик [Chang and Keisler 1966] по аналогии с тем, как была развита теория моделей на основе классической двужначной логики. Здесь же приводятся примеры непрерывных логик, например, логика предикатов L_∞ .

Заметим, что в [Волгин и Левин 1990] (см. также [Левин 2006] и, в особенности, [Левин 2008]) под непрерывной логикой понимается всякая бесконечнозначная логика с непрерывным отрезком множества вещественных чисел. Рассмотрены различные обобщения и многочисленные применения. Аппарат непрерывной логики эффективно используется в исследовании структурно-сложных информационных и управляющих систем. Отметим также, что уже не раз упоминавшаяся работа Р. Мак-Нотона [McNaughton 1951] явилась одной из первых в этой области.

8.7.2.1. Неархимедова логическая многозначность

Интересным современным примером непрерывных логик являются неархимедовы логики, что связано с отрицанием аксиомы фундированности.

Нефундированная теория множеств принадлежит к аксиоматическим теориям, в которых не выполняется правило регулярности (другое название — правило фундированности (*well-foundedness*)), например, в данной теории допускается, чтобы множества содержали самих себя: $X \in X$, или в иной записи: $X = \{X\}$; см. подробнее в [Aczel 1988]. Нефундированные множества неявно используются в нестандартном (более точно, неархимедовом) анализе, а именно в анализе бесконечно малых и p -адическом анализе. Дело в том, что отрицание аксиомы регулярности (фундированности) в числовых системах подразумевает задание неархимедово упорядоченной структуры. Напомним, что аксиома Архимеда звучит так: для любого положительного вещественного числа y существует позитивное целое число n , такое что $y > 1/n$ или $ny > 1$. Неформальный смысл аксиомы Архимеда состоит в утверждении, что все может быть измерено линейкой. Отрицание Архимедовой ак-

сиомы влечет за собой существование бесконечно больших чисел (в случае поля гипервещественных чисел это означает дополнительно существование бесконечно малых чисел (инфинитезималь)).

В серии своих статей (см., например, [Schumann 2007; 2008]) А.Н. Шуман предложил использовать нестандартный логический язык, в котором множество формул определялось бы не с помощью индукции, а посредством коиндукции – операции, двойственной индукции (см. [Bartels 2003]). Такое множество формул может быть полным относительно своих интерпретаций во множестве $[*0, *1]$ гипервещественных чисел или множестве \mathbb{Z}_p целых p -адических чисел. Таким образом, Шуман предложил эффективный метод построения совершенно новых логических языков, для которых синтаксические объекты, семантические объекты и деревья доказательств не соответствуют теоретико-множественной аксиоме фундирования. На практике это означает, что данные языки изначально соответствуют нецентрализованным массово-параллельным вычислениям. Поэтому могут использоваться при дизайне массово-параллельных вычислений, а также при разработке их семантики. Вполне естественно, поэтому, что у языков Шумана наблюдаются более богатые выразительные возможности, чем у других логических языков.

8.7.3. Логика со свойствами других логик

Мы сознательно не употребляем здесь термин «комбинированные логики» (combining logics), широко используемый сейчас в литературе и предполагающий различные комбинации и рекомбинации семантических структур и дедуктивных исчислений, как одной и той же, так и различной природы (см. обзор в [Carnielli and Coniglio 2007]), а также первую монографию [Carnielli, Coniglio, Gabbay, Gouveia and Sernadas 2008]. Относительно паранеротиворечивых логик мы указывали на семантику возможной переводимости в разделе 8.6.3.1. Заметим только, что на самом деле первые случаи (простейшие) комбинирования логик, а именно умножение друг на друга (различных) логических матриц, отмечены нами в конце раздела 4.3.1.

Здесь же мы рассмотрим интересную и продуктивную идею построения бесконечнозначных модальных логик с использованием аппарата многозначной логики, некоторые аналогичные построения и проблему дуальности между логиками.

8.7.3.1. Многозначные модальные логики

Вспомним интерпретацию А.Н. Прайором модальной логики $S5$ посредством бесконечного множества 1-0-последовательностей [Prior 1957a] (см. выше раздел 8.4.2). Новая идея Прайора состояла в том, что в качестве множества истинностных значений можно взять множество бесконечных 1-2-0-последовательностей, где наряду с 1 — «истина» и 0 — «ложь» входит также истинностное значение 2 — «неопределено» [Prior 1957a: 85-86]³⁹. Тогда проблема состоит в выборе покомпонентных операций над этими последовательностями. Если в случае системы $S5$ Прайором используется классическая двузначная логика C_2 , то здесь принята трехзначная слабая логика Клини K_3^w , но с двумя выделенными значениям (см. выше раздел 3.4.2). На таких последовательностях определяются модальные операторы возможности и необходимости, причем 1-2-0-последовательность не может начинаться с 2. Полученную систему Прайор назвал логикой «случайного бытия» (см. [Prior 1967: 154-156]), обозначив ее посредством Q .

В силу того, что модальные операторы здесь не являются дуальными друг к другу, как во всех рассмотренных выше модальных системах, то семантика и аксиоматизация системы Q (гильбертовская аксиоматизация представлена в [Bull 1964]) довольно-таки сложны. Система Q является нестандартной модальной логикой, поскольку было показано, что Q содержится в $S5$, но не является консервативным расширением $S4$.

Последнее время система Q вызывает к себе повышенный интерес. В [Correia 2001] и [Akama and Nagata 2007] построена семантика Крипке для Q такая, что в каждом возможном мире действует не двузначная логика C_2 , а трехзначная логика K_3^w . В [Akama, Nagata and Yamada 2008] система Q расширяется временными операторами, на возможность чего уже указывал Прайор, и рассматривается как подходящая логика для оперирования с будущими случайностями.

К. Сегерберг [Seegerberg 1967], исходя из идей А. Прайора при построении последней системы Q , перестраивает льюисовские модальные системы таким образом, что они являются расширением его же трехзначной логики бессмысленности, т.е. логики Бочвара

³⁹ Заметим, что Прайор исходил из идей Лукасевича о введении в логику третьего истинностного значения (см. выше раздел 3.1).

B_3 , но с двумя выделенными значениями (см. выше раздел 3.3.3)⁴⁰. В [Schotch, Jensen, Larsen and Maclellan 1978] строится модальная логика K на основе трехзначной логики Лукасевича L_3 , т.е. аксиоматизация для L_3 расширяется аксиомами K , и для такой логики строится семантика Крипке, в каждом мире которой действует логика L_3 . В [Morikawa 1989] этот результат обобщается и расширяется на модальные логики M , S_4 и S_5 . В [Ostermann 1988] строятся модальные логики T , S_4 и S_5 , основанные на n -значной логике Лукасевича L_n и с семантикой Крипке, в которой каждый возможный мир ассоциируется с L_n , а в [Orłowska and Iturrioz 1999] каждый возможный мир ассоциируется с алгебрами Лукасевича.

С.К. Томасон [Thomason 1978] обобщает такой семантический подход, т.е. строит крипковскую семантику для модальных логик на случай, когда оценка задается на произвольном множестве истинностных значений. См. также [Priest 2008].

Однако, как отмечается в [Hähnle 2001: 377], возможно и обратное направление, от модальной логики к многозначной. Любая модальная логика с множеством возможных миров W и отношением достижимости $R \subseteq W \times W$ может быть переинтерпретирована в 2^W -значную логику посредством кодирования интерпретации с возможными мирами $I^*: \Sigma \times W \rightarrow \{0,1\}$ как многозначной интерпретации $I: \Sigma \rightarrow 2^W$, где Σ есть множество пропозициональных переменных. Для модальных логик со свойством финитной аппроксимлируемости эта конструкция дает систему с конечнозначной теорией доказательств, характеризующей эти модальные логики [Caferra and Zabel 1990].

О комбинировании модальной и многозначной логики см. также в [Gottwald 2001, ch. 21].

Добавим также, что в качестве основания для модальных логик могут быть взяты другие неклассические логики. Наиболее разработанным подходом являются *интуиционистские модальные логики* (см. об этом в обзоре [Zakharyashev, Wolter and Chagrova 2001], а также раздел 2.4 в книге Д.П. Шкатова [Шкатов 2008]. Одной из первых работ в этой области была статья [Bull 1965].

В заключение обратим внимание на еще одно разветвленное направление в области бесконечнозначных логик — это *интуиционистские многозначные логики*. Отметим только работы [Baaz and Fermüller 1996], где модель Крипке для \mathbf{Int} обобщается на случай многозначных оценок, и [Reznik and Curmin 2001]. Укажем еще

⁴⁰ Интересно, что в [Ишмуратов 1981] строится временная логика, основанная на B_3 , а в [Rescher and Urquhart 1971] строится временная логика, основанная на L_3 .

статью О.М. Аншакова [Аншаков 1983], где производится конструктивизация трехзначных логик Бочвара \mathbf{B}_3 и Холдена \mathbf{H}_3 . Одним из основных условий конструктивизации является наличие дизъюнктивного свойства (см. выше раздел 8.2.2) в новой логике.

8.7.4. Дуальность интуиционистских и паранепротиворечивых логик

С подобными дуальными логиками мы уже встречались. Это построенная нами трехзначная паранепротиворечивая логика Брауэра \mathbf{G}_3 (см. раздел 3.2.1), дуальная к трехзначной логике Гейтинга \mathbf{G}_3 , а также слабая интуиционистская логика \mathbf{I}^1 , дуальная к трехзначной паранепротиворечивой логике Сетте \mathbf{P}^1 (см. раздел 3.5.4.1).

Известно, что интуиционистская логика \mathbf{Int} может быть построена в виде секвенциального исчисления, с теми же правилами вывода, что и классическая логика, но с одним ограничением: сукцедент секвенции не может содержать более одной формулы. Мы получим систему, дуальную к \mathbf{Int} , если потребуем, чтобы в отличие от классического случая, антецедент секвенции содержал не более одной формулы.

Наверное, первая работа на эту тему принадлежит Дж. Чермаку [Czermak 1977], который сформулировал логику, дуальную \mathbf{Int} , в терминах конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. В такой логике не имеет места секвенция вида $A \wedge \neg A \vdash B$. В [Goodman 1981] добавляется связка псевдоразности $\dot{-}$ и пропозициональная константа \mathbf{T} . В этой работе используется понятие алгебры Брауэра, дуальной к алгебре Гейтинга (см. выше раздел 4.4.2), для того чтобы принять адекватную топологическую семантику для нового исчисления. В [Смирнов 1984] (см. также [Смирнов 1987: 221-224]) исчисление Гудмана несколько переформулируется и, что важно, предложены секвенциальные формулировки релевантной логики, т.е. построение дуальной \mathbf{Int} связывается с релевантными логиками. В [Urbas 1996] предлагаются различные секвенциальные дуальные формулировки \mathbf{Int} , и в итоге возникает вопрос, какая на самом деле паранепротиворечивая логика дуальна к \mathbf{Int} ? Понятно, что общим для всех дуальных к \mathbf{Int} логикам является наличие закона исключенного третьего.

Этот вопрос и много других обсуждается в интересной статье [Brunner and Carnielli 2008]. Здесь строится дуальное к \mathbf{Int} гильбертовское исчисление и для него семантика Крипке, которая явля-

ется в точности дуальной к приведенной нами в разделе 8.2.2.1.⁴¹ В этой работе обобщаются идеи из [Urbas 1996] и развивается общий подход к дуализации логик.

Строятся две основные иерархии анти-интуиционистских логик. Первая называется иерархией *анти-конструктивных* логик (АС-иерархия). Вторая называется иерархией *анти-параполных* логик (АР-иерархия). АС-иерархия начинается с дуального исчисления логики Йохансона J (см. выше раздел 8.6), через дуальную Int , и заканчивается дуальными исчислениями G_n , в том числе строится логика G_ω , дуальная к логике Гёделя–Даммита G_∞ . Показывается, что ни одна из известных паранепротиворечивых систем, в том числе рассмотренных нами ($PCont$, J_3 , C_n), не является членом этой иерархии. Таким образом, анти-конструктивные логики составляют новый класс паранепротиворечивых логик.

Вторая иерархия начинается с паранепротиворечивой логики Сетте P^1 и, применяя общую процедуру дуализации параполных логик I^n , получается иерархия паранепротиворечивых логик P^n . Здесь важно то, что по аксиоматизации логик из одной иерархии, строится дуальная аксиоматизация логик из другой иерархии, и наоборот. Заметим, что теперь мы можем объединять две дуальные логики в одну, как это было сделано в [Rauszer 1977; 1980], где объединены логика Гейтинга и логика Брауэра и для такой логики строится семантика Крипке.

В итоге ставится глубокий философский вопрос о значении *дуализации* логик, а также вопрос о дуализации других систем логики.

⁴¹ Интересна философская интерпретация такой семантики. Теперь вместо условия сохранности истинности постулируется условие сохранности ложности. Если нечто на данном этапе исследования признается за ложное, то с прогрессом познания оно никогда не может стать истинным.

9. ТЕОРИЯ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЕТКИЕ ЛОГИКИ

9.1. Преамбула

С выходом статьи Л. Заде «Нечеткие множества» [Zadeh 1965] начинается исключительно бурное развитие новой теории, предназначенной для изучения и анализа систем, в которых основная роль принадлежит суждениям и решениям человека. Такие системы Заде называет «гуманистическими», и к ним относятся психология, социология, политические науки, философия, экономика, лингвистика, операционные исследования, наука управления, физиология и вообще все те системы и процессы, на поведение которых сильное влияние оказывают действия, решения, суждения, эмоции людей. Поскольку эти системы связаны с принципиально нечетким (размытым, расплывчатым) характером человеческих рассуждений (и тем более психики), то сама новая теория получила название «теории нечетких множеств», являющейся обобщением обычной (четкой) теории множеств.

Нечеткая логика, основанная на нечеткой теории множеств, позволяет определять промежуточные значения между стандартными оценками («истина/ложь», «да/нет», «верно/неверно», «холодно/тепло» и т.д.). Оказывается, что понятия «теплее/холоднее» можно сформулировать математически и обработать на компьютере. В этом случае нечеткая логика является попыткой применить в программировании человекоподобное мышление.

С конца 80-х и начала 90-х годов нечеткая логика, под которой зачастую понимается все, что связано с нечеткими подмножествами, занимает чуть ли не ведущее положение в информационных технологиях. Нечеткая логика оказалась очень пригодной для работы с аппроксимированной информацией: она применяется для управления нелинейных систем и для моделирования сложных систем, не имеющих простых математических моделей, где двусмысленность и неопределенность общеприняты. Сегодня нечеткая логика применяется как инструмент управления комплексными промышленными процессами, в экспертных системах и системах обнаружения ошибок. Нечеткие экспертные системы находят широкое применение в медицине и экономике. Области применения нечеткой логики стремительно расширяются, и она давно уже

обеспечивает контроль рабочих параметров бытовой техники. Об изменении нашего мира и о применении нечеткой логики в повседневной жизни см. [McNeill and Freiburger 1993] и [Van Pelt 2008].

Успех этой теории совершенно необычаен. В настоящее время издаются более десяти специализированных журналов по нечетким множествам и системам. Один только международный журнал «*Fuzzy sets and systems*», с 1970 г. начал издавать около 300 статей в год. Хорошим введением в теорию нечетких множеств является монография А. Кофмана [Кофман 1982]. Здесь приведена значительная библиография (с. 400-424) с добавлением русскоязычной литературы по этой теме (с. 424-427). См. также библиографию в [Kandel and Yager 1979], которая насчитывает 1799 названий. Имеются также обзоры в [Dubois and Prade 1994] и [Dubois, Prade and Sessa 1994a, 1994b]. В [Hähnle 2001: 332] отмечается, что поиск соответствующей литературы в Библиотеке Конгресса США обозначил, по крайней мере, 150 книг (включительно по 1999 г.), в заглавии которых встречаются термины “*fuzzy logic*”, “*fuzzy systems*” и “*fuzzy set*”. Отметим только некоторые из них, ставшие классическими: [Nowak 1989], [Zimmermann 1991 (2001)], [Gottwald 1993], [Kruse, Gebhardt and Klawonn 1994], [Klir and Yuan 1995 (2007)], [Nguyen and Walker 1999 (2005)]. На более поздние книги будем ссылаться по ходу изложения материала.

С середины 90-х годов стали выходить книжные серии, самая известная из которых “*Studies in Fuzziness and Soft Computing*” (245 томов по 2009 г.) Последний том посвящен основам теории нечетких множеств [Wang, Da Ruan and Kerre 2009]. С 1998 г. стала выходить фундаментальная серия справочников по нечетким множествам (“*The Handbook of Fuzzy Sets Series*”). Особо стоит отметить т. 7, [Dubois and Prade (eds.), 2000] с предисловием Л. Заде, в котором говорится, что издание этого тома является монументальным достижением в области теории нечетких множеств, ее границ и важных применений. К этому предисловию мы еще вернемся.

Интересна следующая оценка теории Л. Заде: «Концепция размытых множеств, сформулированная в работах Заде, прозвучала как вызов, брошенный европейской культуре с ее дихотомическим видением мира в жестко разграничиваемой системе понятий» [Налимов 1979].

Нас же во всем этом будут интересовать в основном соотношения с логикой.

9.2. Нечеткие множества и соответствующая логика

Исходным понятием обычной теории множеств является понятие принадлежности $x \in A$ элемента x некоторого множества X к определенному подмножеству $A \subset X$. Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие – характеристическую функцию μ_A , значение которой указывает, является ли (да или нет) x элементом A :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Однако как раз в гуманитарных науках это понятие принадлежности оказалось недостаточным для рассмотрения ситуаций, которые описываются с помощью нечетко определенных понятий типа «множество высоких людей», «множество хороших логиков», «множество чисел много больше 10», и т.д. Здесь дихотомия рассмотренной функции принадлежности не позволяет любому элементу или принадлежать, или не принадлежать данному множеству. Таким образом, дихотомия функции принадлежности должна быть отвергнута точно так же, как Я. Лукасевич отверг дихотомию функции приписывания истинностных значений (принцип бивалентности). Тогда, следуя Л. Заде, в основе теории нечетких множеств лежит представление о том, что составляющие множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывание типа «элемент принадлежит данному множеству A » теряет смысл, поскольку необходимо указать, с какой степенью элемент принадлежит данному множеству. Это множество степеней принадлежности может оцениваться на бесконечной шкале действительных (или рациональных) чисел от 0 до 1, или на части чисел интервала $[0, 1]$, в том числе и конечной шкале. Например, объект, определяемый выражением $A = \{(x_1|0,2), (x_2|0), (x_3|0,3), (x_4|1), (x_5|0,8)\}$, где x_i – элемент универсального множества X , а число после вертикальной черты дает значение характеристической функции на этом элементе, будем называть *нечетким подмножеством множества X* . Следовательно, рассмотренное нечеткое подмножество A содержит в небольшой степени x_1 , не содержит x_2 , содержит x_3 в немного большей степени, чем x_1 , полностью содержит x_4 , и в значительной степени x_5 . Итак, A является нечетким под-

множеством, если там имеется по крайней мере один элемент x , который принадлежит A со степенью отличной от 1.

Дадим строгое определение понятия нечеткого множества. Пусть X — множество, счетное или нет, и x — элемент X . Тогда *нечеткое подмножество* A множества X определяется как множество упорядоченных пар $\{(x, \mu_A(x))\}$ для всякого $x \in X$, где μ_A — *характеристическая функция принадлежности*, принимающая свои значения во множестве M (у Заде M есть интервал $[0,1]$), которая указывает степень принадлежности элемента x подмножеству A . Другими словами, *нечеткое подмножество* A множества X есть отображение $f: X \rightarrow [0,1]$. Обозначим посредством $\text{Map}(X, [0,1])$ множество всех таких отображений.

Если $M = \{0, 1\}$, то «нечеткое подмножество» становится «четким», обычным подмножеством. Таким образом, нечеткое подмножество является обобщением обычного подмножества.

Пример. Пусть N — множество натуральных чисел: $\{0, 1, 2, \dots\}$. Рассмотрим нечеткое подмножество «небольших» натуральных чисел: $A = \{(0|1), (1|0,8), (2|0,6), (3|0,4), (4|0,2), (5|0), \dots\}$. Здесь функциональные значения $\mu_A(x)$, где $x = 0, 1, 2, \dots$, задаются, конечно, субъективно. Таким образом, 0 полностью принадлежит A , 1 принадлежит A со степенью 0,8, и т. д.

Определим простейшие операции пересечения \cap , объединения \cup и дополнения — над нечеткими подмножествами. Пусть X — множество и A и B два нечетких подмножества X . Тогда для всякого $x \in X$:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)),$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

$$A = B, \text{ если } \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Теперь схематично построим *нечеткую логику*, утверждения которой в отличие от классической двузначной логики принимают любое значение в $M = [0,1]$, где α и β — нечеткое утверждение и $v(\alpha)$ обозначает истинностное значение α . Логические связки пропозициональной логики определяются обычным образом:

$$v(\alpha \wedge \beta) = \min(v(\alpha), v(\beta)),$$

$$v(\alpha \vee \beta) = \max(v(\alpha), v(\beta)),$$

$$v(\sim \alpha) = 1 - v(\alpha).$$

Для двух нечетких утверждений α и β , если $v(\alpha) = v(\beta)$, то $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Заметим, что здесь логические связки определяются как для логики Клини K_3 и ее обобщений. Поэтому естествен следующий результат. Как известно, обычная теория множеств и законы классической логики являются примерами моделей, удовлетворяющих булевой алгебре (см. выше раздел 4.4.1). Возникает вопрос, моделями какой алгебры является теория нечетких множеств и нечеткая логика? Легко показать, что *нечеткой алгеброй* (типа 1) является алгебра Де Моргана, или, по-другому, дистрибутивная решетка без дополнений, т.е. булева алгебра без закона исключенного третьего $(A \cup -A) = 1$ (и, соответственно, без закона непротиворечия $-(A \cap -A) = 1$). Например, пусть $A = \{(x_1|0,2), (x_2|0,7), (x_3|1), (x_4|0)\}$. Тогда $-A = \{(x_1|0,8), (x_2|0,3), (x_3|0), (x_4|1)\}$. Отсюда, $A \cup -A = \{(x_1|0,8), (x_2|0,7), (x_3|1), (x_4|1)\}$, т.е. $A \cup -A \neq 1$. Поскольку множеством истинностных значений у Заде является интервал $[0, 1]$, как в бесконечнозначной логике Лукасевича L_∞ , и здесь не имеет места закон исключенного третьего, постольку в первом приближении L_∞ может рассматриваться в качестве нечеткой логики. Однако имеется существенное уточнение [Mukaidano 1981], что нечеткая алгебра есть не что иное, как алгебра Клини, которая получается заменой закона исключенного третьего в аксиомах булевой алгебры законом Клини, где последний есть ослабленное условие закона исключенного третьего:

$$(A \cap -A) \cup (B \cup -B) = B \cup -B^1.$$

Как раз важнейшей и простейшей моделью нечеткой алгебры (типа 1) является логика Клини K_3 .

Обратим внимание, что свойства нечеткой теории множеств, как и нечеткой логики, зависят от структуры множества M . В нашем случае это структура интервала $[0,1]$, т.е. алгебра $I = \langle [0,1], \cup, \cap, -, 0, 1 \rangle$ есть алгебра Клини. Мы используем одни и те же символы, как для операций на нечетких подмножествах $Map(X, [0,1])$, так и для операций на $[0,1]$, точно так же, как одни и те же переменные. Конечно, имеются и другие операции на $[0,1]$, которые согласуются с фазификацией, предложенной Заде. Наибольший интерес для логики представляют t-нормы, которые мы рассмотрим в разделе 9.3.

Структура M не обязательно должна быть линейно-упорядоченной, как у Заде, где $M = [0,1]$. Уже в 1967 г. Дж. Гоген [Goguen 1967] сделал обобщение исходных идей Л. Заде, а именно

¹ Ср. с определением алгебры Клини в разделе 4.4.

предложил под множеством M , в котором функции принадлежности принимают свои значения, понимать множество, наделенное более общей структурой, например, M со структурой конечной или бесконечной дистрибутивной решетки и т.д. (см. [Кофман 1982])². Поскольку свойства структуры M индуцируются (сохраняются) на множестве отображений $\mu_A(x): X \rightarrow M$, мы в результате имеем различные теории нечетких множеств.

Нечеткая логика, построенная на основе некоторой теории нечетких множеств, является по существу многозначной логикой. Поскольку в основе нечетких множеств Заде лежит множество чисел в интервале $[0,1]$, то это дало повод считать, что нечеткой логикой является именно бесконечнозначная логика Лукасевича L_∞ . Например, Р. Джайлс [Gills 1976] утверждает, что L_∞ относится к теории нечетких множеств точно так же, как классическая логика к обычной теории множеств. Такого же мнения и Х. Скала [Skala 1978]. Однако заметим, что алгеброй L_∞ является MV -алгебра Чэна (см. выше раздел 8.1.1), которая значительно богаче алгебры Клини. Все дело в том, что при данном подходе мы никак не можем определить импликацию Лукасевича \rightarrow посредством исходных операций. Как мы далее увидим, это можно сделать, но для этого нужно изменить определения исходных операций на множестве $\text{Map}(X, [0,1])$ (см. 9.3).

В связи с этим стоит согласиться с идеями, высказанными в работе О.М. Аншакова и В.К. Финна [Аншаков и Финн 1981], где говорится, что понятие произвольной нечеткой логики весьма неопределенно и может быть уточнено различными способами. В свою очередь авторы дают определение «начальной» нечеткой логики средствами квазибулевой алгебры. Как раз соответствующим уточнением и является алгебра Клини. Обратим внимание, что в этой работе в качестве формализации нечеткой логики предлагается одноимпликационная логика, потому что связки \vee , \wedge , \sim имеют естественную интерпретацию, связанную с определением операций над нечеткими множествами, а столь же ясной интерпретации импликации как операции не имеется. Опять же заметим, что *пока* не имеется, но см. далее раздел 9.4.

² Мы уже встречались с подобным упорядочиванием, например, четырехэлементная алгебра Де Моргана и соответствующая ей логика Белнапа $DM4$ (см. раздел 5.4.3).

9.3. Вторая стадия фазификации

С работы 1975 г. (см. [Заде 1976]), Л. Заде начал развивать так называемую *нечеткозначную логику*. Последняя является результатом двух стадий фазификации, и пока мы рассмотрели только первую стадию, которая состоит в переходе от двузначной к многозначной логике как результат учета степеней принадлежности элементов множеству. Однако фазификации подвергается и само понятие *Истинности* — вторая стадия, — которая состоит в переходе к счетному множеству нечетких истинностных значений в результате отнесения самого понятия *Истинности* к нечетким. Если, скажем, «*a* принадлежит со степенью 0,3 к множеству высоких людей», тогда высказыванию «*a* является высоким» следует приписать в базисной (многозначной) логике значение 0,3. Но поскольку, как уже говорилось, *Истинность* сама является нечетким предикатом, как и предикат «быть высоким», то и рассматривать ее следует аналогично предикату «быть высоким». Степень истинности, которую имеет высказывание *p*, может быть совсем низкой, очень высокой, и т.д. Поэтому, если *a* принадлежит к множеству высоких людей со степенью 0,3, так что высказывание «*a* является высоким» имеет значение 0,3 в некоторой многозначной логике, то оно будет иметь, скажем, значение *не очень истинный* в нечеткозначной логике, поскольку степень истинности этого высказывания в многозначной логике довольно низкая.

Каковы же особенности нечеткозначной логики? Эта логика является основой того, что можно было бы назвать приближенными рассуждениями, которыми пользуются в некорректно определенных или не поддающихся количественному описанию ситуациях, что особенно проявляется, например, в диалоге человека с человеком. Приближенные рассуждения характерны тем, что значения истинности и правила вывода являются не четкими, а не точными. Это в свою очередь требует гораздо более радикальной реконструкции всей логики, чем та, которая произошла в результате появления многозначной логики, поскольку на множестве нечетких истинностных значений не сохраняются обычные логические связи. В итоге все разработанные ранее логические системы (Заде называет их стандартными, включая и многозначную логику) не пригодны для формализации приближенных рассуждений. Примером такого рассуждения в нечеткозначной логике является следующий вариант известного аристотелевского силлогизма (пример Заде):

А. Большинство людей тщеславны
В. Сократ человек

С. Возможно Сократ тщеславен
или *С'*: *Очень возможно, что Сократ тщеславен.*

В этом примере как *С*, так и *С'* являются допустимыми приближенными следствиями из *А* и *В* со степенью приближенности, зависящей от определения нечетких предикатов *большинство*, *возможно* и *очень возможно* как нечетких подмножеств соответствующего универсума рассмотрения.

Согласно Заде, множеством истинностных значений в нечеткозначной логике является счетное множество лингвистических названий значений *Истинности*, понимаемой как лингвистическая переменная, т.е. такая переменная, значениями которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка. Будем полагать, что множество значений переменной *Истинность* имеет вид:

$$T(\text{Истинность}) = \{\text{истинный, ложный, не истинный, очень истинный, не очень истинный, более или менее истинный, очень очень истинный, не очень истинный и не очень ложный...}\}.$$

В свою очередь, переменная *Истинность* имеет также числовые значения, играющие роль различных степеней *Истинности*. При этом в качестве числовых значений берется множество истинностных значений некоторой многозначной логики, обычно континуальной логики Лукасевича L_∞ . Такая логика называется базовой логикой. Будем предполагать, что $V = [0,1]$, если не оговорено противное. Теперь перейдем к рассмотрению смысла лингвистических значений *Истинности*. Смысл первичного лингвистического значения *истинный* отождествляется с нечетким подмножеством множества истинностных значений базовой логики. Как обычно, нечеткое подмножество характеризуется функцией принадлежности, которая каждому числовому значению *Истинности* ставит в соответствие число из интервала $[0,1]$. Таким образом, вторая стадия фазификации состоит в том, что функция принадлежности здесь сама является нечеткой, поскольку ее степень есть нечеткое подмножество в $[0,1]$, а не точки (отдельные числа) из $[0,1]$, т. е.

$$\mu_{\text{истинный}}: [0,1] \rightarrow [0,1].$$

Таким образом, в рассмотрение вводятся нечеткие подмножества с нечеткими функциями принадлежности, т.е., если A — нечеткое подмножество универсального множества X , то значениями функций принадлежности могут быть нечеткие подмножества из интервала $[0,1]$.

9.3.1. Нечеткие множества типа 2

Чтобы отличить такие нечеткие подмножества от нечетких подмножеств, рассмотренных ранее, будем называть их *нечеткими подмножествами типа 2*. Более строго: нечеткое подмножество A типа 2 в X есть нечеткое подмножество, которое характеризуется нечеткой функцией принадлежности μ_A как

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]',$$

где значение $\mu_A(x)$ называется нечеткой степенью и является нечетким подмножеством в $[0,1]$. В качестве J обычно берется $[0,1]$. Тогда, если нечеткое подмножество типа 1 характеризуется функцией принадлежности $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$, то нечеткое подмножество типа 2 характеризуется функцией принадлежности $\mu_A(x): X \rightarrow \mathcal{P}([0,1])$, где $\mathcal{P}([0,1]) = \{f: [0,1] \rightarrow [0,1]\}$. По аналогии с этим определяются нечеткие подмножества типа 3, 4 и т. д.

Подчеркнем сразу, что сами нечеткие множества типа 2 являются трехмерными образованиями, а алгебра $\mathcal{P}([0,1])$ представляет собой довольно-таки сложный объект. Именно нечеткие подмножества типа 2, т.е. элементы множества $\mathcal{P}([0,1])$, и выступают в качестве истинностных значений в *нечеткозначной логике*, понятие которой было введено в 1975 (см. [Bellman and Zadeh 1977]). Но для того чтобы строить какую-то нечеткозначную логику, надо выяснить хотя бы основные свойства структуры $\mathcal{P}([0,1])$.

Как уже говорилось, структурой интервала $[0,1]$ является алгебра Клини. Возникает следующий вопрос: какова решеточная структура множества $\mathcal{P}([0,1])$? Этому вопросу посвящена работа [Mizumoto and Tanaka 1976]. При определении операций на элементах множества $\mathcal{P}([0,1])$ применяется *принцип обобщения*, введенный Л. Заде [Zade 1976], который носит эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения f на класс нечетких множеств.

Пусть $A, B \in \mathcal{P}([0,1])$ и пусть $*$ есть бинарная операция, определенная в $[0,1]$. Тогда для $\forall x, y, z \in [0,1]$ операция $*$ может быть расширена на нечеткие множества A и B посредством принципа обобщения следующим образом:

$$\mu_{A*B}(z) = \bigvee_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Отсюда расширенные операции $\max(A,B)$ и $\min(A,B)$ через их функции принадлежности запишем так:

$$\mu_{\max(A,B)}(z) = \bigvee_{z=\max(x,y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

$$\mu_{\min(A,B)}(z) = \bigvee_{z=\min(x,y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

$$\mu_{\neg A}(x) = \mu_{1-A}(x) = \mu_A(1-x).$$

Однако оказалось, что отличия от обычной теории нечетких множеств, т.е. от теории нечетких множеств типа 1, весьма существенны: имеет место квази-решетка с законами де Моргана, т.е. нет поглощения (IV) и дистрибутивности (V) и, конечно, законов (B1) и (B2). Не выполняются также тождества (X), но имеют место тождества (IX) (см. выше раздел 4.4)³. В [Nieminen 1977] проведен более детальный анализ нечеткой алгебры типа 2. Тщательное исследование этой алгебраической структуры, с использованием стандартной математической нотации, проведено в [Walker C. and Walker E. 2005]. Особое внимание уделено подалгебрам этой алгебры, имеющим интересные приложения. Здесь устанавливаются некоторые критерии для этих подалгебр быть решетками, дистрибутивными решетками, алгебрами Клини, алгебрами Де Моргана и т.д. См. также обзор данной тематики в [Walker C. and Walker E. 2008].

9.3.1.1. Ограничения и упрощения

Отсутствие законов дистрибутивности и поглощения очень затрудняет вычисление операций на множестве $\mathcal{P}([0,1])$. Поэтому используются различные конструкции, упрощающие технический аппарат нечетких множеств типа 2. Рассмотрим некоторые из них.

А. Наибольшее распространение получили *интервально-значные нечеткие множества* (IVFS), которые появились у разных авторов под разными названиями в одном и том же 1975 г., в том числе и в работе Л. Заде [Zadeh 1975]. Интересно, что IVFS переоткрывались и позже.

³ В [Karnik and Mendel 1998] результаты этой работы расширены и представлен практически применимый алгоритм для выполнения объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств типа 2.

Исходная идея заключается в том, что значениями функции принадлежности f являются не подмножества из $[0,1]$, а замкнутые подинтервалы в $[0,1]$, т.е. отображения $f: X \rightarrow [0,1]^{[2]}$ есть IVFS. Тогда алгебра $I^{[2]}$ состоит из пар (a, b) таких, что $0 \leq a \leq b \leq 1$, и соответствующих покомпонентных операций. Фундаментальные свойства этой алгебры исследованы в [Gehrke, Walker C. and Walker E. 1996], где показано, что она представляет собой алгебру Де Моргана.

IVFS нашли исключительное развитие и применение. По крайней мере, в монографии [Mendel 2001] особое внимание уделяется IVFS, где подчеркивается, что нет никаких разумных оснований не выбрать их. IVFS и основанным на них системам посвящена статья [Mendel, John and Liu 2006].

В. Очень содержательным оказался другой подход к моделированию нечеткости, когда стандартной теории нечетких множеств оказывается недостаточно. Основная идея заключается в том, чтобы использовать сразу пару функций принадлежности $(\mu_A^+(x), \mu_A^-(x))$, обозначенную посредством IF , где $\mu_A^+(x)$ есть степень принадлежности x в IF и $\mu_A^-(x)$ есть степень непринадлежности этого элемента. При этом функции удовлетворяют условию (I): $\mu_A^+(x) + \mu_A^-(x) \leq 1$.

Такая конструкция впервые была предложена в 1983 г. К. Атанассовым (см. [Atanassov 1986] и его монографию [Atanassov 1999]) и названа *интуиционистскими нечеткими множествами* (IFS). В силу простоты и удобства применения⁴ IFS привлекла к себе большое внимание и уже через 20 лет список литературы насчитывал более 400 публикаций (см. обзор литературы по IVFS и IFS в [Nikolova M., Nikolov N., Cornelis and Deschrijver 2002]).

Однако, и это было уже отмечено самим Атанассовым и другими, IFS-конструкция изоморфна IVFS-конструкции. Использование инволютивного отрицания, действующего на пару функций $(\mu_A^+(x), \mu_A^-(x))$, формально коллапсирует IFS-теорию в IVFS-теорию. В действительности, условие (I) всегда гарантирует существование интервала $[(\mu_A^+(x), 1 - \mu_A^-(x))]$, который можно идентифицировать с соответствующим интервалом в IVFS-теории. К тому же IFS-теория является специальным случаем L -нечетких множеств в смысле Гогена [Goguen 1967].

Но в итоге все это ставит очень серьезные проблемы относительно названия «интуиционистские нечеткие множества» и тем

⁴ Например, IFS являются подходящим аппаратом при моделировании процедуры выборов, где голоса «за» и «против» не обязательно исчерпывают весь универсум.

более относительно названия «интуиционистская нечеткая логика». Для логиков создавшееся положение оказалось совершенно неприемлемым, чем и была вызвана статья ведущих специалистов [Dubous, Gottwald, Hájek, Kacprzyk and Prade 2005]⁵.

Здесь отмечается, что в интуиционистской нечеткой теории множеств⁶, основанной на интуиционистской логике **Int** (см. выше раздел 8.2.2), не имеет места инволютивный закон снятия двойного отрицания, к тому же в **Int** имеет место закон непротиворечия, которого нет в IFS. От себя добавим, что в **Int**, как уже говорилось, не имеет места один из законов Де Моргана, в то время как алгебраической структурой IFS является именно алгебра Де Моргана⁷. Статья носит весьма корректный характер, отмечаются преимущества IFS при интуитивной интерпретации и применении, и предлагается, совершенно справедливо, название IFS переименовать в «биполярные нечеткие множества».

С. Если же все-таки отдается предпочтение нечетким множествам типа 2, то обычно в качестве истинностных значений для так называемой нечеткозначной логики используются не просто элементы множества $\mathcal{P}([0,1])$, а так называемые нечеткие числа [Bellman and Zadeh 1977] (например, число «чуть больше 7»), т. е. элементы из $\mathcal{P}([0,1])$, но с дополнительными условиями:

нормальность: $\exists x \in [0,1], \mu_A(x) = 1$,

выпуклость: $\forall x, y, z \in [0,1]^3, x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_A(y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(z))$.

Как следует из [Mizumoto and Tanaka 1976], алгеброй нечеткой теории множеств типа 2 с условием нормальности является также деморгановская недистрибутивная квази-решетка, но в которой выполняются условия (IX) и (X). Если же добавить условие выпуклости, то алгеброй нормальных выпуклых чисел является алгебра Де Моргана (см. также [Walker C. and Walker E. 2005, Theorem 38]).

⁵ Здесь содержатся необходимые ссылки о появлении IVFS и IFS и их сходстве.

⁶ Дается ссылка на работу [Takeuti and Titani 1984] (и на др. работы), на которую мы также ссылаемся в разделе 8.2.3.1.

⁷ Неудивительно, что логика Белнапа **DM4** (см. выше раздел 5.4.3) стала объектом фазификации. Поскольку ее истинностные значения можно представить посредством упорядоченных пар, то первый компонент указывает на степень принадлежности, а второй на степень непринадлежности. См. [Cornelis, Atanassov and Kerre 2003].

9.3.1.2. Иерархия минимальных моделей для нечетких алгебр типа 2

Обратим внимание, что открытие в [Mizumoto and Tanaka 1976] того факта, что расширенные операции \max и \min на элементах множества $\mathcal{P}([0, 1])$ образуют квази-решетку, представляет собой особый интерес уже потому, что логики со структурой квази-решетки (например, трехзначная логика Бочвара B_3) получили широкое распространение. B_3 выполняет все условия для нечеткой алгебры типа 2, но кроме этого выполняются законы дистрибутивности. Поэтому представляет интерес матрица VII, которая появилась в результате классификации трехзначных логик значения (см. [Финн, Аншаков, Григолия и Забейсайло 1980: 45]):

x	$\sim x$	\wedge	0	$\frac{1}{2}$	1	\vee	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1

Эти операции образуют деморгановскую квази-решетку без законов дистрибутивности, здесь выполняется IX(b), но не выполняется IX(a).

В [Карпенко и Шалак 1997] показано (с помощью компьютерной программы), что не существует трехзначной матрицы, в точности выполняющей все условия из [Mizumoto and Tanaka 1976] для нечеткой алгебры типа 2. Однако найдены четыре пары подходящих четырехзначных матриц, в которых две трехзначные подматрицы со значениями $\{0, \frac{1}{3}, 1\}$ и $\{0, \frac{2}{3}, 1\}$ в точности моделируют слабые операции Клини (или внутренние операции Бочвара — см. выше раздел 3). Таким образом, во всех полученных четырехзначных матрицах обобщаются эти операции. Из этих четырех пар матриц выберем ту, в которой операции \wedge и \vee на множестве истинностных значений $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ есть \min и \max соответственно. Рассмотрим эти истинностные таблицы:

x	$\sim x$	\wedge	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	\vee	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Суммируем свойства этой матрицы. Во-первых, две указанные трехзначные подматрицы образуют дистрибутивную квази-решетку. Во-вторых, подматрицы с истинностными значениями $\{0, 1\}$ и $\{1/3, 2/3\}$ образуют булеву решетку. В результате это дает деморгановскую недистрибутивную квази-решетку. Таким образом, эта матрица является моделью для нечеткой алгебры типа 2, точно так же как трехэлементная матрица Клини является моделью для нечеткой алгебры типа 1.

Однако интересно рассмотреть модель для *нормальной* нечеткой алгебры типа 2. Оказывается, не существует не только трехэлементной, но и четырехэлементной модели для нормальной нечеткой алгебры типа 2 (!) С помощью компьютерной программы было найдено 14 пар подходящих пятизначных матриц. Рассмотрим одну из них, которая отличается от пятизначных сильных матриц Клини только тем, что $2/4 \wedge 3/4 = 1/4$ и $2/4 \vee 1/4 = 3/4$. Этого оказалось достаточно, чтобы разрушить дистрибутивность и закон поглощения:

x	$\sim x$	\wedge	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	1	\vee	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	$1/4$	$2/4$	$3/4$	1
$1/4$	$3/4$	$1/4$	0	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$3/4$	$3/4$	1
$2/4$	$2/4$	$2/4$	0	$1/4$	$2/4$	$1/4$	$2/4$	$2/4$	$2/4$	$3/4$	$2/4$	$3/4$	1
$3/4$	$1/4$	$3/4$	0	$1/4$	$1/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	$3/4$	1
1	0	1	0	$1/4$	$2/4$	$3/4$	1	1	1	1	1	1	1

Заметим, что здесь подматрицы $\{0, 2/4, 1\}$ и $\{0, 1/4, 3/4, 1\}$ являются в точности трехзначными и четырехзначными матрицами Клини.

В итоге мы имеем иерархию минимальных логических матриц, в основе которой лежат следующие соответствия:

- наивная теория множеств — алгебра Буля — *двузначные* матрицы классической логики;
- теория нечетких множеств типа 1 — алгебра Клини (деморгановская дистрибутивная решетка с законом Клини) — *трехзначные* матрицы Клини;
- теория нечетких множеств типа 2 — деморгановская недистрибутивная квази-решетка с невыполнением условия (X) — *четырёхзначные* матрицы;
- теория нормальных нечетких множеств типа 2 — деморгановская недистрибутивная квази-решетка с выполнением условия (X) — *пятизначные* матрицы.

Отметим, что матрицами для теории интервально-значных нечетких множеств и матрицами для теории нормальных выпуклых множеств типа 2 являются четырехзначные матрицы, поскольку алгеброй этих множеств является алгебра Де Моргана. Эти матрицы являются минимальными для различения алгебры Де Моргана от алгебры Клини.

9.3.2. На пути к нечеткой логике

Бесчисленное употребление термина «нечеткая логика» в заглавии работ может ввести читателя в заблуждение. Как уже подчеркивалось, возникают серьезные технические трудности при оперировании объектами такой сложной природы, как нечеткие множества типа 2. В предисловии к сборнику [Ягер (ред.), 1986] Л. Заде обращает внимание на незатронутую область исследований в этой книге, а именно на важность таких понятий, как нечеткие множества высших типов, т.е. множества с нечеткими функциями принадлежности. Развитие эффективных средств анализа нечеткой арифметики и нечеткозначной логики Л. Заде считает проблемой первостепенной важности. Эти проблемы рассматриваются в сборнике [Поспелов (ред.), 1986] (см. в особенности гл. 6 «Нечеткая логика и приближенные рассуждения»). Прояснению природы нечетких множеств типа 2 и того, как можно их использовать, посвящена статья [Mendel and John 2002]. См. также обзор [Mendel 2007] и монографию [Castillo and Melin 2008].

В большинстве случаев термин «нечеткая логика» стал синонимом «теория нечетких множеств». Зачастую под системой нечеткой логики понимается описание сложных процессов, природа которых не может быть аппроксимирована традиционными математическими методами, а если и можно это сделать, то весьма сложным образом⁸.

Однако возникает на самом деле логическая проблематика: как можно делать выводы на основе данных, не являющихся «четкими»? В этом случае человек имеет дело с *приближенными рассуждениями*. В прекрасном курсе лекций Г.Я. Яхьяевой «Основы

⁸ Обратим внимание на то, что явным недостатком нечеткой логики Заде, основанной на теории нечетких множеств, является то, что истинностные значения приписываются высказываниям посредством априорно заданных μ -функций. В связи с этим обратим внимание на *ДСМ-метод автоматического порождения гипотез* (активно развиваемый с начала 80-х годов; см. [Анишаков (ред.), 2009]), где истинностные значения конструктивно определяются посредством правил правдоподобного вывода для индукции и аналогии.

нечетких множеств» (Интернет-Университет, 2006) говорится: «Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык [...], в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины» (см. лекцию 10: «Теория приближенных рассуждений»).

Главным понятием теории приближенных рассуждений является *композиционное правило вывода*, введенное Л. Заде в 1973 г. (см. [Заде 1974], а также [Круглов и Дли 2002]). Пусть U и V – два универсальных множества с $u \in U$ и $v \in V$ соответственно. Пусть A и R – нечеткие подмножества множеств U и $U \times V$. Тогда *композиционное правило вывода*, введенное Заде в 1973 г., утверждает, что из нечетких множеств A и R следует нечеткое множество $B = A \circ R$, где \circ есть операция композиции нечетких множеств. Если эту операцию распишем, то в общем случае получим следующую формулу:

$$\mu_B(v) = \sup_{u \in U_x} (\mu_A(u) * \mu_R(u, v)),$$

где $*$ есть некоторая бинарная операция. Само правило получило название «*sup-star композиции*». Частным случаем этого правила является *modus ponens*. Важным оказалось выяснить, что понимать под операцией $*$? Оказалось, что этой операции соответствуют *t-нормы* (см. следующий раздел).

Заметим, что по аналогии с нечеткой логикой типа 1 вводятся нечеткозначные логические операции и обобщается *sup-star композиция* на случай нечетких множеств типа 2. Специально этот вопрос рассматривается в статье [Dubois and Prade 1979a], но их формула использует в качестве $*$ только операцию \min . Обобщенная формула для расширенной *sup-star композиции* в применении к нечетким множествам типа 2 была дана в статье [Karnik, Mendel and Liang 1999].

Однако строго о логической дедукции здесь говорить нельзя. Поэтому не случайно много усилий было потрачено на то, чтобы решить проблему импликации, т.е. выяснить, что является нечеткой импликацией. Отметим только статьи [Mamdani and Sembí 1979] и [Fodor 1991], главу в книге [Klir and Yuan 1995] и монографию [Baczynski and Jayaram 2008], а также книгу [Батыршин 2001], посвященную вообще операциям в нечеткой логике.

Как известно, в классической логике формулы $A \rightarrow B$, $\neg A \vee B$ и $\neg(A \wedge \neg B)$ логически эквивалентны. Но мы уже знаем, что в K_3 , являющейся простейшей моделью нечеткой алгебры типа 1, подоб-

ное определение импликации не является удовлетворительным: класс тавтологий пуст, а при двух выделенных значениях правило *modus ponens* не сохраняет тавтологичность. Импликация, определенная указанным образом, получила название *S*-импликации.

Проблемы, вызванные тем, что на самом деле надо понимать под нечеткой логикой (FL), сложности с логическими операциями и с дедукцией, а главное, огромное число пишущих людей о FL и не имеющих представления о самой логике, привело к дискуссии, вызванной статьей [Elkan 1993], где «доказывалось», что FL невозможна. Основная часть дискуссии отражена в специальном выпуске журнала "IEEE Expert" (1994).

В дискуссию пришлось вмешаться Л. Заде [Zadeh 1994], где он сделал разделение FL на два направления: *в узком смысле и в широком смысле*. В узком смысле FL — это логическая система, являющаяся расширением многозначной логики. Однако даже для FL в узком смысле список основных операций очень отличается как по духу, так и по содержанию от списка основных операций для систем многозначных логик. В ее широком смысле, который сегодня является преобладающим в использовании, FL равнозначна теории нечетких множеств. С этой точки зрения, FL в узком смысле является разделом FL в широком смысле. Примерно то же самое было сказано в статье 1998 г. (см. [Zade 2001]). К этой теме Заде вернется в предисловии к [Dubois and Prade (eds.), 2000], которое почти целиком посвящено разъяснению смысла термина «нечеткая логика». FL в ее широком смысле имеет четыре принципиальных аспекта: логический аспект, который по существу является FL в узком смысле; теоретико-множественный аспект, наиболее распространенный и связанный с исходной работой Заде [Zadeh 1965]; аспект нечетких отношений и зависимостей, где центральным является понятие лингвистической переменной и понятие нечеткого правила; эпистемический аспект. Также делается важное замечание, что FL в целом скорее дополняет, чем конкурирует с существующими логическими теориями.

Серьезный ответ на то, чем является FL в узком смысле, был дан в монографии [Hájek 1998], где FL предстала в виде гильбертовских исчислений, а многозначная логика стала ядром или базисом FL в узком смысле. Более того, здесь показано, что средствами первопорядковой многозначной логики можно адекватно моделировать некоторые нечеткие правила (см. пример 7) или показывать, что некоторые правила FL не верны в системе многозначной логики, что ставит под сомнение их правильность в FL. На это специально также указывается в [Hähnle 2001: 333].

9.4. Логика, основанные на t-нормах

К концу XX в. появилась потребность в некоторой классификации бесконечнозначных логик и выделении соответствующей базисной логики, исходя из которой простым расширением можно было бы получать другие хорошо известные логики. Тогда в основе такой логики должна лежать очень элементарная логическая операция. Подходящим инструментом для этого оказались триангулярные нормы (t-нормы), которые расширяют аппарат нечеткой логики. Систематическое изучение нечетких логик, основанных на t-нормах, начато в монографии [Hájek 1998], которая положила начало новому этапу в развитии многозначных логик. Здесь начато исследование нечетких логик как неклассических логик в виде гильбертовских пропозициональных и предикатных исчислений. См. также [Turunen 1999], [Nowak, Perfilieva and Mockor 2000] (имеется перевод на рус. яз.) и [Gottwald 2001, ch. 13 and 14]. В статье для «Стэнфордской Философской Энциклопедии» нечеткая логика представлена именно в этом духе [Hájek 2006] и несколько шире в [Hájek 2002 (2006)].

9.4.1. Т-нормы

Т-нормы были введены в 1958 г. в рамках теории вероятностных метрических пространств (см. [Schweizer and Sklar 1960]), исходя из идей К. Менгера (1942) о триангулярных неравенствах. Подробное изложение теории t-норм, их происхождение, развитие и применение имеется в монографии [Klement, Mesiar and Pap 2000] (см. также [Klement and Mesiar (eds.), 2005]). Класс t-норм исключительно обширен и имеет довольно-таки непростые примеры, но для нас важно то, что t-нормы есть вид бинарной операции, которая обобщает, с одной стороны, операцию решеточного пересечения, а с другой стороны, свойства обычной классической конъюнкции.

Т-нормой является бинарная операция $*$, которая определяется на интервале $[0, 1]$ и удовлетворяет следующим свойствам. Для всех $x, y, z \in [0, 1]$:

- Коммутативность, $x * y = y * x$.
- Ассоциативность, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
- Монотонность, если $x \leq y$, то $x * z \leq y * z$.
- Граничные условия, $1 * x = x$ и $0 * x = 0$. Таким образом, 1 есть нейтральный элемент.

В конце 70-х годов сразу несколько авторов предложили использовать *t*-нормы как подходящий класс функций для моделирования пересечения нечетких множеств (см. [Dubois and Prade 1979b] и [Höhle 1979]).

T-норма называется *непрерывной*, если она непрерывна как функция, т.е. является непрерывным отображением $[0,1]^2$ в $[0,1]$. Это условие, среди других, обеспечивает «хорошую» импликацию \mapsto , которую называли *R*-импликацией [Trillas and Valverde 1981] и которую в итоге стали определять как *резидуал* относительно конъюнкции $*$:

$$(x * y) \leq z \text{ т.т.т., когда } x \leq y \mapsto z \quad (R).$$

В этом случае говорят, что операции $*$ и \Rightarrow образуют *сопряженную пару*. Таким образом, условие сопряженности в действительности ограничивает *t*-нормы на случай непрерывности слева. Такие *t*-нормы будем называть *л-непрерывными* (*left-continuous*) *t*-нормами. В явном виде операция \Rightarrow характеризуется следующим образом:

$$x \Rightarrow y = \sup \{z \mid z * x \leq y\}.$$

Это обеспечивает следующее ее свойство:

$$x * (x \Rightarrow y) \leq y.$$

Последнее интерпретируется как *нечеткая* версия правила *modus ponens*. Понятно, что *t*-нормы, имеющие соответствующую хорошую импликацию, представляют для логики особый интерес.

Посредством *t*-нормы и ее резидуала могут быть определены другие операции, например, операция $-$, соответствующая пропозициональному отрицанию \neg , определяется следующим образом:

$$\neg x =: x \mapsto 0.$$

Также, ограничившись непрерывными *t*-нормами, можно определить операции *min* и *max*, что позволит рассматривать $[0,1]$ как решеточную структуру. Используя обычные обозначения, имеем:

$$x \cap y =: x * (x \mapsto y),$$

$$x \cup y =: ((x \mapsto y) \mapsto y) \cap ((y \mapsto x) \mapsto x).$$

Посредством этих операций определяются истинностные значения молекулярных формул на интервале $[0,1]$. Обычным образом, формулы, которые всегда принимают значение 1, называются тавтологиями, или $*$ -тавтологиями. Множество всех $*$ -тавтологий называется логикой, основанной на *t*-норме $*$. Такие логики будем

называть t -логиками. Наиболее важные примеры t -логик следующие [Hájek 1998]:

1. Бесконечнозначная логика Лукасевича L_∞ , в которой t -нормой является $x \otimes y = \max(0, x + y - 1)$, а \rightarrow есть резидуал относительно \otimes (см. выше раздел 8.1.1).
2. Логика Гёделя–Даммита G_∞ , в которой t -нормой является $x \wedge y = \min(x, y)$, а \Rightarrow есть резидуал относительно \wedge (см. выше раздел 8.2.3.1).
3. Логика произведений Π [Hájek, Godo and Esteve 1996], в которой t -нормой является $x \odot y = x \cdot y$ (обычное произведение действительных чисел); импликация $x \rightarrow_p y = 1$, если $x \leq y$ и $x \rightarrow_p y = y/x$ в остальных случаях; отрицание такое же, как в G_∞ .

9.4.2. Семантический подход

Проблема адекватной аксиоматизации t -логик столкнулась с той трудностью, что не было стандартного подхода к семантическому обоснованию систем таких логик. Оказалось, что здесь нет единственной «стандартной» семантической матрицы с множеством истинностных значений $[0,1]$, которую можно было бы использовать в качестве общего подхода. Поэтому первоначально усилия были направлены на то, чтобы найти такие абстрактные алгебраические структуры, которые улавливали бы различие между непрерывными t -нормами и λ -непрерывными t -нормами, и затем построить соответствующие логические исчисления. Разработка такой семантики получила название общей (*general*) семантики, основанной на классе абстрактных алгебр.

Алгебраическая структура $\langle L, *, \mapsto, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ называется *резидуированной решеткой* [Pavelka 1979], если

- $\langle L, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ есть ограниченная решетка;
- $\langle L, *, 1 \rangle$ есть абелев моноид;
- Выполняется условие сопряженности $(R)^9$ (см. выше).

На самом деле *резидуал* t -нормы существует т.т.т., когда t -норма является λ -непрерывной. Таким образом, λ -непрерывные

⁹ Впервые исследование резидуированных решеток начато в [Dilworth and Ward 1939]; понятие сопряженной пары введено в [Pavelka 1979].

t-нормы характеризуются резидуированными решетками. Подобным образом можно дать алгебраическую характеристику полностью непрерывных t-норм.

Резидуированная решетка $\langle L, *, \mapsto, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ называется *делимой* (*divisible*) т.т.т., когда для всех $x, y \in L$ ($x \leq y$) существует некоторое $z \in L$ такое, что $x = y * z$. Альтернативной характеристикой делимости в резидуированных решетках является введение слабой конъюнкции: $x \cap y = x * (x \mapsto y)$ для всех $x, y \in L$ (см. выше). Таким образом, резидуированная решетка, детерминированная t-нормой $*$, является делимой т.т.т., когда $*$ непрерывна.

Всё что остается, чтобы охарактеризовать непрерывные t-нормы, это условие предлинейности. Резидуированная решетка $\langle L, *, \mapsto, \cap, \cup, 0, 1 \rangle$ является *предлинейной* т.т.т., когда

$$(x \mapsto y) \cup (y \mapsto x) = 1$$

для всех $x, y \in L$.

Делимые предлинейные резидуированные решетки получили название *BL-алгебр* [Hájek 1998], которые являются *многообразиями*. Особый интерес представляют следующие три подкласса *BL-алгебр*. Пусть \mathcal{A} есть *BL-алгебра*.

- \mathcal{A} есть *MV-алгебра*, если \mathcal{A} удовлетворяет тождеству: $x = -(-x)$.
- \mathcal{A} есть *G-алгебра* (алгебра логики Гёделя–Даммита G_∞), если \mathcal{A} удовлетворяет тождеству: $x = x * x$.
- \mathcal{A} есть *Π-алгебра*, если \mathcal{A} удовлетворяет тождеству: $(y \mapsto 0) \cup ((y \mapsto x * y) \mapsto x) = 1$.

Комбинирование этих тождеств позволяет определять другие алгебраические структуры, являющиеся расширением *BL-алгебры* (см. рисунок в [Hähnle 2001: 322], где отображены алгебраические структуры между *BL-алгебрами* и *MV*-, *Π*- и *G-алгебрами*).

Свойство предлинейности позволяет свести изучение *BL-алгебр* (и любое их подмногообразие, такое, как *MV-алгебры*, *G-алгебры* или *Π-алгебры*) к изучению линейно-упорядоченных алгебр [Hájek 1998]:

1. Каждая *BL-алгебра* является *подпрямым произведением* линейно-упорядоченных *BL-алгебр*.

2. Каждое многообразие BL-алгебр порождается линейно-упорядоченными BL-алгебрами, т.е. BL-цепями¹⁰.

Здесь же П. Хаек сформулировал гипотезу, что многообразие BL-алгебр на самом деле порождается всеми алгебрами вида $\langle [0,1], *, \mapsto, 0, 1 \rangle$, где $*$ есть непрерывная t-норма на $[0,1]$. Гипотеза была доказана в [Cignoli, Esteva, Godo and Torrens 2000]. Это позволяет доказывать полноту с оценкой формул в отрезке $[0,1]$. Такое доказательство полноты для t-логик, называется *стандартным*, а сама семантика — *стандартной*.

9.4.3. Базисная нечеткая логика BL и ее расширения

В [Hájek 1998] представлена гильбертовская аксиоматизация базисной логики BL, основанной на t-норме, в языке \rightarrow , $\&$ и \perp , соответствующему алгебраическим операциям \mapsto , $*$ и 0 :

$$\text{BL1. } (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$\text{BL2. } A \& B \rightarrow A,$$

$$\text{BL3. } A \& B \rightarrow B \& A,$$

$$\text{BL4. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \& B \rightarrow C),$$

$$\text{BL5. } (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)),$$

$$\text{BL6. } A \& (A \rightarrow B) \rightarrow B \& (B \rightarrow A),$$

$$\text{BL7. } ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C),$$

$$\text{BL8. } \perp \rightarrow A.$$

Единственным правилом вывода является *modus ponens*¹¹.

Дополнительные логические связи \neg , \wedge и \vee определяются точно так же, как соответствующие алгебраические операции $-$, \cap и \cup . Как уже говорилось, в [Hájek 1998] доказана общая теорема полноты с построением алгебры Линденбаума для BL, а в [Cignoli, Esteva, Godo and Torrens 2000] дано стандартное доказательство,

¹⁰ Алгебраическому изучению непрерывных t-норм посвящена работа [Agliano, Ferreirim and Montagna 2007].

¹¹ Здесь же дана аксиоматизация предикатной базисной логики BLV. Стоит заметить, что поскольку главные различия между нечеткой и классической логиками лежат на пропозициональном уровне, то нечеткие предикатные логики развивались замедленно. Этот пробел восполняется в [Hájek and Cintula 2006].

откуда следует, что базисная логика **BL** является логикой непрерывных *t*-норм.

Расширениями **BL** П. Хакк получает адекватную аксиоматизацию следующих трех известных логик:

- Логика Лукасевича \mathbf{L}_∞ есть $\mathbf{BL} + \neg\neg A \rightarrow A$.
- Логика Гёделя–Даммита \mathbf{G}_∞ есть $\mathbf{BL} + A \rightarrow A \& A$.
- Логика произведений Π есть $\mathbf{BL} + \neg(A \wedge \neg A),$
 $\neg\neg A \rightarrow ((A \& C \rightarrow B \& C) \rightarrow (A \rightarrow B))$.
- Классическая логика \mathbf{C}_2 есть $\mathbf{BL} + \neg\neg A \rightarrow A,$
 $A \rightarrow A \& A$.

Таким образом, логикой Лукасевича \mathbf{L}_∞ является инволютивная **BL** логика. Интересное взаимоотношение между этими логиками на алгебраическом уровне дано в [Vetterlein 2008], где ставится задача построения альтернативной семантики для нечётких логик \mathbf{L}_∞ и **BL**. Для этого берется класс булевых алгебр и класс алгебр Гейтинга. На каждом из этих классов вводится специальное отношение эквивалентности (*a-equivalence*), которое при естественных допущениях в первом случае порождает структуру соответствующую *MV*-алгебре, а во втором случае, структуру соответствующую *BL*-алгебре. Теперь высказывания \mathbf{L}_∞ - и **BL**-логик оцениваются элементами из полученных классов эквивалентностей соответственно.

9.4.3.1. Базисная нечеткая логика предикатов $\mathbf{BL}\forall$

Формулы базисной нечеткой логики предикатов $\mathbf{BL}\forall$ определяются так же, как в первопорядковой логике (см. выше раздел 1.6.2), и строятся из переменных по индивидам, предикатных символов, связок $\&$, \rightarrow , \perp (остальные связки определяются указанным выше образом) и кванторов \forall и \exists . Стандартная интерпретация состоит из непустой области D и функции, которая отображает n -местный предикатный символ в n -местное нечеткое отношение (n -местным нечетким отношением здесь является отображение из множества n -местных последовательностей элементов D в множество истинностных значений $[0, 1]$ — значения, при которых n -местные последовательности удовлетворяют формуле $P(x_1, \dots, x_n)$). Теперь, с учетом непрерывной *t*-нормы, связки интерпретируются (в стиле Тарского), как в базисной пропозициональной логике **BL**. Степень истинности формулы вида $\forall x A$ определяется как *инфимум* (наибольшая нижняя грань) степеней истинности из A , и степень истинности

формулы вида $\exists xA$ определяется как *супремум* (наименьшая верхняя грань) степеней истинности из A .¹²

Эта интерпретация $\mathbf{BL}\forall$ обобщает алгебраическую семантику, основанную на линейно-упорядоченных BL -алгебрах (см. выше). Формула A есть обобщенная BL -тавтология в предикатной нечеткой логике $\mathbf{BL}\forall$, если она принимает значение 1 при каждой интерпретации. В [Hájek 1998, ch. 5.1] представлено доказательство, что следующая аксиоматизация $\mathbf{BL}\forall$ является адекватной:

0. Аксиомы пропозициональной логики \mathbf{BL} .
1. $\forall xA(x) \rightarrow A(t)$
2. $A(t) \rightarrow \exists xA(x)$
3. $\forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall xA)$
4. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow B)$
5. $\forall x(A \vee B) \rightarrow (\forall xA \vee B)$,

где $A(t)$ есть результат правильной подстановки терма t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу A (подобная подстановка называется правильной, когда никакое из заменяемых вхождений x в A не находится в области действия квантора по переменной, входящей в состав терма t) и формула B не содержит свободных вхождений x .

Правилами вывода являются *modus ponens* и правило обобщения.

9.4.4. Моноидная логика, основанная на t -норме

Тот факт, что t -норма имеет резидуал т.т.т., когда она является l -непрерывной, послужил отправной точкой для построения логики l -непрерывных t -норм, которая была обозначена посредством \mathbf{MTL} .

В [Esteve and Godo 2001] \mathbf{MTL} была аксиоматизирована как ослабление логики \mathbf{BL} . Поскольку соответствующие алгебры не являются делимыми, т.е. мы не можем определить слабую конъюнкцию \wedge , то аксиоматизация логики \mathbf{MTL} дается с двумя конъюнкциями:

$$\mathbf{MTL1.} \quad (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)),$$

$$\mathbf{MTL2.} \quad A \& B \rightarrow A,$$

¹² Определение инфимума и супремума см. выше в разделе 4.4.

$$\text{MTL3. } A \& B \rightarrow B \& A,$$

$$\text{MTL4. } A \wedge B \rightarrow A,$$

$$\text{MTL5. } A \wedge B \rightarrow B \wedge A,$$

$$\text{MTL6. } A \& (A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge B,$$

$$\text{MTL7. } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \& B \rightarrow C),$$

$$\text{MTL8. } (A \& B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C)),$$

$$\text{MTL9. } ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C),$$

$$\text{MTL10. } \perp \rightarrow A.$$

Единственным правилом вывода является *modus ponens*.¹³

В [Esteve and Godo 2001] доказана общая полнота **MTL**, т.е. относительно *MTL*-алгебр (класса резидуированных предлинейных решеток), а в [Jenej and Montagna 2002] доказана стандартная полнота. Таким образом, логика **MTL** есть логика *л*-непрерывных *t*-норм. Поскольку *BL*-алгебры есть делимые *MTL*-алгебры, то другой адекватной аксиоматизацией базисной логики **BL** является **MTL** с дополнительной аксиомной схемой

$$A \wedge B \rightarrow A \& (A \rightarrow B).$$

В свою очередь логика **MTL** является расширением *моноидной логики ML* [Höhle 1994] (логика резидуированных решеток) посредством добавления аксиомы предлинейности. Интересно, что логика **ML** на самом деле есть интуиционистская логика **Int** без сокращения, если взять генценовскую формулировку **Int** под названием **LJ** (см. [Takamura 2004], или система **FL_{ew}**, которая есть расширение полного исчисления Ламбека посредством правил перестановки и ослабления (см. например, [Ono and Komori 1985]).

В [Hähnle 2001: 321] приведена иерархия алгебраических структур (12 структур), имеющих отношение с *t*-нормами, а в [Esteve and Godo 2000x] построена решетка *t*-логик. В [Gottwald and Hajek 2005] дается обзор пропозициональных *t*-логик, а в [Cintula and Hájek 2000x] дается обзор предикатных *t*-логик.

¹³ В [Cintula 2005] показано, что аксиомная схема MTL3 выводима из остальных.

9.4.5. Расширения t-логик новыми связками и другие вопросы

Большую известность приобрела логика Павелки **RPL** [Pavelka 1979], которая является расширением логики Лукасевича **L**_∞ посредством введения в пропозициональный язык бесконечного числа логических констант вида r r для каждого рационального числа $r \in [0,1]$. Предикатная версия **RPL** определяется аналогичным образом. В логике **RPL** можно определить градуированную (*graded*) истину с помощью $r \rightarrow A$. Наличие в языке констант подобного вида используется при доказательстве теорем о полноте для целого класса логик (так называемый метод Павелки, упрощенный в [Hájek 1998]). В [De Baets, Esteva, Fodor and Godo 1999] аналогичным образом расширяется логика Гёделя–Даммита **G**_∞.

Фундаментальным расширением стандартного языка t-логик является добавление унарной пропозициональной связки Δ (о ее свойствах см. в разделе 8.3.1.1). В [Hájek 1998: 57] аксиомы ($\Delta 1$) – ($\Delta 5$) добавляются к **BL**. О некоммутативных t-логиках см. в [Hájek 2003]. Другие обобщения t-логик и их недавние применения см. в [Gottwald 2007].

Наконец, сделаны обобщения обычных t-норм на случай интервально-значных нечетких множеств [Gehrke, Walker C. and Walker E. 1996] и на случай нечетких множеств типа 2 (см. [Walker C. and Walker E. 2006]).

10. ИСТИННОСТНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИК

Почти после столетнего развития многозначной логики появилась необходимость в прояснении того, что *сейчас* понимается под истинностными значениями? В 2008 г. в Институте философии Дрезденского Технологического Университета состоялась Международная школа, посвященная проблематике истинностных значений. Приглашенные доклады опубликованы в двух специальных выпусках журнала "*Studia Logica*", 2009: 91(3) и 92(2). См. предисловие [Shramko and Wansing 2009] редакторов этих выпусков. Наконец, Г. Ванзингом и Я. Шрамко и готовится фундаментальная работа под названием «*Истинностные значения*» для Стэнфордской Философской Энциклопедии.

Все это весьма примечательно и даже выглядит интригующе, поскольку вопрос о том, что представляют собой истинностные значения в многозначных логиках, все равно остается проблемой номер один. Некоторый обзор по данной проблематике на конец 80-х годов прошлого века был дан в [Карпенко 1989с]. А уже после того, когда была принята некоторая концепция истинностных значений, предложена сама интерпретация многозначных логик, получившая название «фактор-семантики» [Karpenko 1983].

10.1. Фиксация проблемы

Бесконечное разнообразие реального мира требует бесконечного разнообразия его моделей, примерами которых также служат многозначные логики. Появляются новые, все более необычные примеры как отдельных логик, так и целых классов логических систем. Поэтому вопрос об интерпретации многозначных логик становится все более актуальным, и не случайно поэтому обзоры по многозначной логике [Rose 1981] и [Urquhart 1986] заканчиваются именно этой темой; а проблема интерпретации истинностных значений является центральной и, видимо, сложнейшей проблемой для теории многозначных логик. В обзоре [Hähnle 2001] раздел 2.5 называется «Каково смысловое значение истинностных значений?» Здесь в примечании 9 автор предлагает вообще не говорить об *истинностных значениях*, а только о *значениях*.

Суть последней проблемы была сформулирована еще З. Йорданом: «Без интерпретации приписывания определенного логического значения числу n “истинностных значений” любое n -значное исчисление остается абстрактной структурой» [Jordan 1945: 393-394]. Как мы уже знаем, в качестве истинностных значений используются натуральные числа, рациональные, действительные (могут быть комплексные), отрицательные и т.д. Специально теме истинностных значений впервые была посвящена статья А.А. Зиновьева [Зиновьев 1959], развивающая некоторый философский подход. Может показаться удивительным, что, несмотря на то исключительное развитие, которое получили многозначные логики Лукасевича, вопрос об интерпретации истинностных значений в этих логиках все еще обсуждается в современной литературе. Вот что пишет по этому поводу Данна Скотт: «Перед тем, как вы примете многозначную логику как долгожданного брата, попробуйте понять, что могут означать дробные истинностные значения. И имеют ли они какой-либо смысл? Каково концептуальное подтверждение “промежуточных значений”» [Scott 1976: 66]. Остается также неясным, отмечает Д. Скотт, обоснование логических операций в L_n . В [Da Costa, Béziau and Bueno 1996: 281] указывается, что «фундаментальная проблема относительно многозначности — узнать, что она в реальности означает».

В монографии [Bolc and Borowik 1992: 61] ограничились лишь замечанием, что вопрос об истинностных значениях затруднителен, зато в монографии [Gottwald 2001: 4] сделано несколько конструктивных предложений. Здесь отмечается, что если подходить философски, то не очевидно, как интуитивно интерпретировать эти (добавленные) истинностные значения. Чтобы избежать путаницы с классической двузначной логикой, предлагается в случае с многозначной логикой говорить о *степенях истины*¹ и использовать выражение «истинностные значения» только для классической логики. При этом выделяются два совершенно отдельных аспекта:

- отрицательный аспект, поскольку не имеется никакого естественного понимания (значения) степеней истинности;
- положительный аспект, поскольку можно свободно интерпретировать степени истинности в зависимости от соответствующего применения многозначной логики.

Делается также важное замечание о возможности “редукции” степеней истинности к стандартным истинностным значениям Т (истина) и F (ложь). Этот вопрос будет рассмотрен нами специально, в

¹ Здесь несомненно влияние теории Л. Заде о нечеткой истине.

частности, в виде ответа Д. Скотту, как можно проинтерпретировать дробные истинностные значения в многозначных логиках Лукасевича.

10.2. Логический мир Г. Фреге: два истинностных значения

Однако, как это ни покажется странным, проблемы возникают уже для самих классических истинностных значений: Т (истина) и F (ложь). Как отмечает А. Чёрч [Чёрч 1960, примечание 67], впервые в явном виде два истинностных значения встречаются у Ч. Пирса в 1885 г. Г. Фреге впервые использовал истинностные значения в 1891 г., а в знаменитой статье [Фреге 1977], относящейся к 1892 г., был сформулирован взгляд на высказывания как на имена истинностных значений. Это приводит к тому, что истинностными значениями являются два объекта, один из которых называется «истина», а другой — «ложь», и этими объектами оцениваются высказывания. Философские истоки такого подхода рассмотрены в [Gabriel 1984].

В последнее время оживилась дискуссия относительно теории истинностных значений Фреге, основным возражением против которой было то, что они постулируют абстрактные объекты типа истинностных значений. Отсюда, например, все истинностные высказывания имеют один и тот же денотат, как, впрочем, и все ложные. Но что тогда является смыслом высказывания? На этот вопрос пытались дать ответ многие работы, например [Ray 1979], [Sengupta 1984], [Sutara 1982], в последней из которых предлагается считать денотатами (т.е. истинностными значениями) высказываний положения дел. Тогда положения дел, соответствующие любым двум истинным высказываниям, различны, а значит, высказывания имеют различный смысл. Также в [Barwise and Perry 1981], где разрабатывается «ситуационная семантика», не принимается существование одного и того же денотата для всех истинных предложений. Однако, заметим, для истинностно-функциональной семантики различие в смыслах является несущественным и им можно пренебречь.

Обратим также внимание на статью [Béziau 1999] и в особенности на работу Я. Шрамко [Шрамко 2009]. В последней дается глубокий философский анализ феномена введения в логику двух абстрактных объектов «истина» и «ложь» и высоко оцениваются последствия этого для развития современной логики.

Итак, существует два фундаментальных абстрактных объекта «истина» и «ложь» (наряду с числами, геометрическими фигурами,

классами), которые образуют *логический мир Фреге*. Этот мир наиболее изучен (начиная с работ самого Г. Фреге, А. Уайтхеда и Б. Рассела), понятен, и два классических истинностных значения не вызывают никакого сомнения. Их можно считать константами логического мышления. К этому стоит также добавить, что имеется знаменитый *аргумент рогатки (slingshot)*, предназначенный для того, чтобы формально строго доказать тезис, что все истинные предложения обозначают одну и ту же вещь и все ложные предложения обозначают одну и ту же вещь. Этими вещами как раз и являются истинностные значения *истина* или *ложь*. Указанный аргумент восходит уже к некоторым замечаниям Фреге и впервые сформулирован А. Чёрчем. См. об этом подробно в [Шрамко 2009, §4], где приводится соответствующая литература.

Но существуют и *другие логические миры*.

10.3. Другие логические миры

Уже в ближайшее к Фреге время его универсум истинностных значений оказался недостаточным, поскольку кроме действительного положения дел, которое имеет или не имеет места сейчас, зачастую приходится говорить о положении дел, которое может быть или не быть. Так появилась трехзначная логика Лукасевича. Подробно о введении в логику третьего истинностного значения см. выше гл. 3 (см. также [Томова 2009а]).

Появление таких дополнительных истинностных значений, как «случайно», «возможно», «безразлично», «неопределено», «неизвестно», «бесмысленно», «парадоксально», «противоречиво», «антиномично» и т.д., говорит уже о преднамеренной содержательной интерпретации и привязывается к непосредственному применению той или иной трехзначной логики. Так появляются *трехзначные миры* Лукасевича, Бочвара, Клини, Асеньо–Приста и т.д. Главное здесь то, что принятая интерпретация третьего истинностного значения позволяет соответствующим образом определять логические связи. Так появляется важное разделение на сильные и слабые связи в трехзначной логике Клини и на внутренние и внешние связи в трехзначной логике Бочвара. Обратим внимание также на то, что введение третьего истинностного значения может играть столь различную роль в приложениях самой трехзначной логики, что сравнение свойств этих значений привело к очень плодотворной идее о *типе* истинностных значений [Финн и др. 1980].

Появление логик с четырьмя истинностными значениями оказалось весьма удобным средством для определения и интерпретации модальных операторов, а также для обоснования самих четы-

рехзначных логик. Специально этому посвящена статья [Caton 1963], где обоснование дается в терминах *модализованных* истинностных значений. Как раз проблема обоснования логики в первую очередь требует интерпретации самого множества истинностных значений, в данном случае множества $\{1, 2, 3, 4\}$. В [Caton 1963] этими числами обозначаются соответственно «логическая истина», «случайная истина», «случайная ложь» и «логическая ложь».

В таком же духе дается интуитивная интерпретация истинностных значений четырехзначной логики Н. Решером [Rescher 1965]:

Истинностные значения	Интерпретация I	Интерпретация II
1	необходимо истинно	истинно
2	случайно истинно	вероятно истинно
3	случайно ложно	вероятно ложно
4	необходимо ложно	ложно

Н. Решер предлагает модификацию интерпретации I следующим образом. Пусть имеются два несовместимых положения дел, одно из которых есть актуальное положение x , а другое — возможное альтернативное положение y . Любое высказывание может принимать значение из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ согласно следующим правилам:

- истинно в x и в y (т. е. необходимо истинно),
- истинно в x , но не в y (т. е. актуально, но не необходимо истинно),
- ложно в x , но не истинно в y (т. е. актуально, но не необходимо ложно),
- ложно в x и в y (т. е. необходимо ложно).

Эта интерпретация истинностных значений непосредственно восходит к А. Прайору [Prior 1955], который при обосновании четырехзначных модальных логик пришел к идее семантики возможных миров. В данном случае А. Прайор полагает два возможных положения дел x и y таких, что в каждом из них высказывание может быть или истинным или ложным. В результате элементы множества истинностных значений $\{1, 2, 3, 4\}$ соответственно интерпретируются двучленными последовательностями, состоящими из

вхождений Т (истина) и F (ложь): 1 – $\langle T, T \rangle$, 2 – $\langle T, F \rangle$, 3 – $\langle F, T \rangle$, 4 – $\langle F, F \rangle$ ².

Другие примеры четырехзначных логик мы подробно рассмотрели в гл. 5, где наиболее интересной и важной в применении оказалась четырехзначная логика Белнапа (см. [Белнап 1981a; 1981b]). Наиболее существенным оказалось то, что четыре истинностных значения Белнапа можно по-разному упорядочивать³, в результате чего получаем или логическую решетку или эпистемическую решетку истинностных значений. Теперь можно соответствующим образом проинтерпретировать и логические связки. Несомненно, идея М. Данна о том, что в качестве истинностных значений в четырехзначной логике могут выступать подмножества классического множества истинностных значений $\{T, F\}$, оказалась революционной.

Хотя и немного, но имеются содержательные примеры интерпретации и применения конечнозначных логик со множеством истинностных значений, превосходящих 4. Последний пример, а именно четыре восьмизначных логики, исходя из идей Белнапа, представлены Д.В. Зайцевым [Zaitsev 2009]. Берется множество всех подмножеств трехэлементного множества истинностных значений логики Клини K_3 . В качестве истинностных значений получаем восемь подмножеств. На этом множестве вводятся четыре отношения порядка: относительно истины Т, относительно лжи F, относительно неопределенности N и относительно включения \subseteq . Самое важное, что все четыре семантики моделируют следование первой ступени (см. выше раздел 5.4.4)..

Проблемы начинаются с интерпретации произвольных конечнозначных логик и в первую очередь – с осмысления того, чем являются в этих логиках истинностные значения. Поскольку, как выше было указано, проблема труднейшая, то не лучше ли её вообще элиминировать?

² Здесь А. Прайор исходит из идей Я. Лукасевича при построении последним четырехзначной Ł-модальной логики (см. выше раздел 5.4.1).

³ Это можно делать и с тремя истинностными значениями, но более плодотворной оказалась идея с четырьмя истинностными значениями.

10.4. Тезис Сушко

В начале 70-х годов известный польский логик Р. Сушко озадачил сторонников и адептов многозначных логик тезисом, согласно которому «каждая логика является (логически) двузначной» [Suszko 1977: 378]. Этот тезис вызвал дискуссию, которая продолжается по сей день (см. [Da Costa, Béziau and Bueno 1996], [Tsuji 1998], [Wansing and Shramko 2008]; другие работы будут указаны ниже).

Тезис Сушко имел бы только философское значение, если бы не предложенный им формальный метод, который должен показать, что каждая логика имеет бивалентную семантику. Это было названо *редукцией Сушко*. Сам математический аспект редукции вначале не был до конца прояснен, но идейная сторона того, что понимается под *двузначной семантикой*, состоит в следующем. Таковой является произвольное семейство произвольных функций из множества пропозициональных формул в множество логических значений. Последнее множество идентифицируется с множеством классических истинностных значений $\{0, 1\}$, где 0 представляет значение «ложь», а 1 представляет значение «истина». В этой семантике указанные функции являются характеристическими функциями множества формул и называются *логическими оценками*. В отличие от логических оценок, оценки v в многозначных логиках (см. раздел 4.2) являются *алгебраическими оценками*: гомоморфизмами, отображающими алгебру формул в алгебру того же типа истинностных значений (в логическую матрицу).

В [Suszko 1975] построена бивалентная семантика для трехзначной логики Лукасевича \mathbf{L}_3 . Пусть For обозначает множество формул пропозиционального языка \mathcal{L} , а $\{0, 1\}$ — множество истинностных значений. Тогда LV_3 есть множество всех функций $t: For \rightarrow \{0, 1\}$ таких, что для любых $A, B, C \in For$ выполняются следующие условия:

- (0) $t(C) = 0$ или $t(\sim C) = 0$
- (1) $t(A \rightarrow B) = 1$ всегда, когда $t(B) = 1$
- (2) если $t(A) = 1$ и $t(B) = 0$, то $t(A \rightarrow B) = 0$
- (3) если $t(A) = t(B)$ и $t(\sim A) = t(\sim B)$, то $t(A \rightarrow B) = 1$
- (4) если $t(A) = t(B) = 0$ и $t(\sim A) \neq t(\sim B)$, то $t(A \rightarrow B) = t(\sim A)$
- (5) если $t(\sim A) = 0$, то $t(\sim \sim A) = t(A)$
- (6) если $t(A) = 1$ и $t(B) = 0$, то $t(\sim(A \rightarrow B)) = t(\sim B)$
- (7) если $t(A) = t(\sim A) = t(B)$ и $t(\sim B) = 1$, то $t(\sim(A \rightarrow B)) = 0$.

При таком подходе элементы 1, $\frac{1}{2}$ и 0 трехзначной матрицы Лукасевича не рассматриваются как *логические значения*; они предстают, по Сушко, именно как *алгебраические значения*. Очевидно, что представленная семантика является неистинностно-функциональной. Сам Сушко не пояснил, почему именно таковы условия истинности и как эту процедуру можно распространить на другие логики. В [Malinowski 1977] была построена бивалентная семантика для n -значных логик Лукасевича L_n . Правда, отмечает Г. Малиновский, описание приемлемых оценок становится трудночитаемым (illegible). Заметим, что в [Caleiro, Carnielli, Coniglio and Marcos 2005] представлен алгоритм построения бивалентной семантики для конечнозначных пропозициональных логик, а в [Caleiro and Marcos 2009] этот алгоритм усовершенствован.

Тезис Сушко вызвал определенную критику. У Сушко логика определяется в точности *структурной* операцией присоединения следствий, или структурным отношением выводимости \vdash (см. раздел 4.2). При этом предполагается, что множество истинностных значений V разбивается на два непересекающихся класса: множество выделенных значений D^+ , представляющее «истину», и множество антивыделенных значений D^- , представляющее «ложь». Эти два класса полностью исчерпывают универсум истинностных значений (поскольку один класс является дополнением другого) и в общем случае представляют собой два логических значения, одно из которых, а именно «истина» используется при определении логического следования. Заметим, что дуальным образом можно использовать и «ложь», но класс тавтологий останется тем же самым. Однако в [Malinowski 1994] сконструирована трехзначная *квази-матричная* логика, в которой пересечение $D^+ \cap D^- = \emptyset$ и отношение логического следования определяется относительно D^+ и D^- , но множества D^+ и D^- не исчерпывают всего множества истинностных значений. В силу этого редукция Сушко только к двум значениям не может быть применена.

В статье [Tsuji 1998] был поставлен вопрос о достаточных и необходимых условиях для того, чтобы логика имела бивалентную семантику, и доказан ряд утверждений (см. также [Wansing and Shramko 2008]). Наконец, в прекрасной статье [Font 2009] расставлены все акценты и редукция Сушко в наиболее общей форме выглядит следующим образом.

Пусть X есть множество и пусть $\vdash \subseteq P(X) \times (X)$ есть отношение, где $P(X)$ есть множество всех подмножеств множества X . Тогда \vdash есть отношение замыкания т.т.т., когда оно является двузначным.

Доказательство. Отношение замыкания удовлетворяет трем аксиомам Тарского (1) – (3) (см. выше раздел 4.2). Отношение $\vdash \subseteq \mathcal{P}(X) \times (X)$ является *двузначным*, если существует такое множество функций $V \subseteq 2^X$, что для произвольных $Y \subseteq X$ и $a \in X$ выполняется условие

$$Y \vdash a \Leftrightarrow \forall v \in V \forall y \in Y, \text{ если } v(y) = 1, \text{ то } v(a) = 1. (*)$$

Лего видеть, что любое отношение, удовлетворяющее (*), удовлетворяет также аксиомам Тарского (1) – (3). В обратную сторону следует из того (см. [Burris and Sankappanavar 1981]), что отношение замыкания определяется ассоциированным с ним семейством замкнутых подмножеств $C = \{Y \subseteq X : \text{если } Y \vdash a, \text{ то } a \in Y\}$. Если характеристическую функцию произвольного подмножества $Y \subseteq X$ обозначим посредством μ_Y , тогда $V = \{\mu_Y : Y \in C\}$ есть нужное семейство функций, удовлетворяющее (*)⁴.

Как отмечается в [Font 2009], *отношения замыкания и семантики Сушко представляют собой одно и то же*. Отсюда и возникают трудности в понимании того, что представляет собой семантика Сушко, поскольку здесь оказывается, что *семантика есть логика*. Поэтому, продолжает Дж. Фонт, очень трудно принять бивалентную семантику Сушко действительно как семантику. Семантика на самом деле должна что-то говорить о логике и помогать решать внутренние проблемы логики, например, ее разрешимость или финитную аппроксимируемость, или наличие интерполяционного свойства. Эту роль как раз выполняют матричная семантика, алгебраическая семантика, семантика Крипке и т.д.

Интересно, что многие авторы указывают на крайнюю *неконструктивность* бивалентной семантики и даже ее бесполезность, например, в [Avron 2009] для бесконечнозначных логик предлагается *семантика недетерминированных матриц* (введенная в [Avron and Lev 2005]), основанная на обобщенных матрицах Вуйцицкого (см. выше раздел 4.2). Поскольку эта семантика состоит из конечного семейства конечнозначных матриц, то отсюда следует разрешимость соответствующей логики. На самом деле, *семантика недетерминированных матриц* является частным случаем *семантики возможной переводимости* (мы упоминали ее в разделе 8.6.3.1). Существенной чертой всех этих новых семантик, и в первую очередь семантики Сушко, является то, что они не являются истинностно-функциональными, т.е. ослабляется принцип экстен-

⁴ В [Font 2009: 386] отмечается, что этот результат уже имеется в диссертации [Béziau 1995: 33], хотя и не сформулированный явно в виде отдельной теоремы.

сиональности (композиции)⁵. То, что сам этот принцип не является таким уж тривиальным, как кажется на первый взгляд, хорошо проанализировано в [Marcos 2009], где показывается, как ослабление принципа композиции приводит к желаемым семантикам. Важно то, что одна и та же логика может иметь как функционально-истинностную семантику, так и нефункционально-истинностную семантику и, таким образом, не логика является неистинностно-функциональной, а такова семантика этой логики.

В связи с тезисом Сушко обратимся к конкретизации систем с замыканием, предложенной А.В. Кузнецовым и рассмотренной нами в разделе 7.2.1. Здесь X представляет собой множество n -значных функций и на этом множестве определяется оператор замыкания $[]$. Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между отношениями замыкания, операторами замыкания и системами с замыканием⁶. Оператор замыкания определяется посредством операции суперпозиции и если теперь представить логику в виде функциональной системы (P_n, C) , то мы знаем, что уже на трехзначном уровне мощность множества замкнутых классов континуальна. Поэтому ни о каком сведении многозначной логики к двузначной не может быть и речи, поскольку в последней мощность множества замкнутых классов счетна.

Как отмечается в [Font 2009: 390], один из способов понять различие между «алгебраическими значениями» и «логическими значениями» заключается в том, чтобы интерпретировать последние как *истинностные значения метатеории*, в то время как первые есть *истинностные значения теории*.

Трудности с интерпретацией самих истинностных значений и разделение значений на алгебраические и логические — все это привело в последние годы к тому, чтобы использовать истинностные значения логических матриц в их собственном значении как *степени истинности*, оставляя за скобками вопрос об их природе. Обычно отношение логического следования определяется как сохраняющее *истину* от посылок к заключению, но теперь мы должны учитывать и другие истинностные значения, посредством введения множества выделенных значений D^+ и множества антивыделенных значений D^- , где $D^+ \cap D^- = \emptyset$, и теперь при определении логического следования мы должны учитывать оба эти множества (см. [Malinowski 1994]). Обобщение этой идеи приводит к определению логического следования относительно каждого собственного под-

⁵ Это можно делать по-разному, например, [Rescher 1962], [Ивлев 1992; 2002], [Карпенко 2001b].

⁶ См. [Brown and Suszko 1975], [Burris and Sankappanavar 1981] и [Lau 2006].

множества V . Логико-математический аппарат для осуществления этой идеи известен – это обобщенные матрицы Вуйцицкого (см. выше раздел 4.2).

Пусть Fm есть множество формул пропозиционального языка, состоящего из счетного множества пропозициональных букв и конечного непустого множества финитарных связок C . N -значная k -мерная матрица (k -матрица) есть структура $\mathfrak{M} = \langle V, D_1, \dots, D_k, f_c: c \in C \rangle$, где V есть непустое множество мощности n ($2 \leq n$), $2 \leq k$, каждое D_i ($1 \leq i \leq k$) есть непустое собственное подмножество множества V , множества D_i являются попарно различными и f_c есть функция на V с той же самой ариальностью, как c . Множества D_i называются выделенными множествами. Функция оценки v определяется обычным образом.

Отношение логического следования на множестве Fm определяется следующим образом:

$$\Gamma \models_{i, \mathfrak{M}} A \text{ т.т.т., когда } v(\Gamma) \subseteq D_i \text{ влечет } v(A) \in D_i.$$

Тогда под многозначной логикой понимается семейство $\langle Fm, \{\models_{i, \mathfrak{M}}: i \in I\} \rangle$, где каждое \models_i характеризует логику Тарского (см. выше раздел 4.2)⁷. Такой подход развит в [Wansing and Shramko 2008], соответственно которому степени истинности в многозначных логиках предстают в наиболее общем виде как подмножества множества истинностных значений, а отношение логического следования сохраняет эти степени истинности. Тогда множества D_i играют роль «логических значений». Здесь очень интересной идеей является неразличение истинностных значений, если относительно их задается одно и то же отношение логического следования. Например, в классической логике можно определить логическое следование дуальным образом как сохраняющее не истину, а ложь. При этом класс тавтологий остается неизменным. В таком случае, считают авторы, классическая логика является *однозначной*. Таким образом, истинностные значения различаются при их использовании при определении логического следования.

В [Font 2009] подобные подходы, идентифицирующие логические значения со степенями истинности и различающие истинностные значения в указанном выше смысле, считаются весьма плодотворными.

⁷ У Р. Вуйцицкого (см. [Wójcicki 1988: 189]) с обобщенной матрицей ассоциируется *единственное* отношение логического следования:

$$\cap \{ \models_{i, \mathfrak{M}} \mid \mathfrak{M} = \langle V, D_i, \{f_c: c \in C\} \rangle, 1 \leq i \leq k \}.$$

творными для понимания общей сути многозначной логики⁸, дается обзор (§3) и высвечиваются проблемы.

Однако стоит подчеркнуть, что в 70-е годы идею редукции неклассических логик, в том числе многозначных, к двузначной пытались воплотить многие авторы. Наиболее близкой к Сушко стала семантика оценок Н. да Косты для бесконечнозначных паранепротиворечивых логик, изложенная нами в разделе 8.6.3 (см. также [Kotas and da Costa 1980]). Логическая бивалентная семантика стала главным семантическим инструментом для изучения «логик формальной противоречивости» (см. [Da Costa, Krause and Bueno 2007] и [Carnielli, Coniglio and Marcos 2007], где такая семантика названа «семантикой биоценок»).

Бивалентный подход к логике развивался также в [Routley and Meyer 1976] и [Batens 1982] и других работах. Особое внимание привлекло применение данного подхода к конечнозначным логикам Лукасевича \mathbf{L}_n , как наиболее известным. Интересно, что 10-я глава монографии Г. Малиновского [Malinowski 1993] называется «Классическая интерпретация многозначных логик». В качестве объекта для изучения берутся конечнозначные логики Лукасевича \mathbf{L}_n и рассматриваются подходы Р. Сушко, Д. Скотта и А. Уркварта.

Однако подчеркнем, что в отличие от формального подхода Сушко были предприняты попытки *содержательно* проинтерпретировать истинностные значения \mathbf{L}_n и сами логические связки.

10.5. Интуитивная интерпретация \mathbf{L}_n . Проблемы

Большую известность приобрела семантика крипковского типа

$$\mathcal{K}_n = \langle S_n, \leq, \vdash \rangle$$

для \mathbf{L}_n и некоторых других конечнозначных логик⁹, предложенная А. Урквартом в [Urquhart 1973]. Он определяет такое отношение

⁸ Именно в таком духе в [Font, Gil, Torrens and Verdú 2006] рассматривается логика Лукасевича \mathbf{L}_∞ .

⁹ Здесь также предложена семантика для n -значных логик Поста и для логики Бочвара с внутренними связками. См. также [Dahn 1974]. На логику Лукасевича \mathbf{L}_∞ свою семантику Уркварту распространить не удалось. Однако крипковская семантика для бесконечнозначных логик, основанных на t -нормах, куда входит и \mathbf{L}_∞ (см. выше раздел 9.4), как пропозициональных, так и предикатных, рассмотрена в [Montagna and Sacchetti 2003]. См. также работу [Béziau 2006], где сравниваются функции оценки как гомоморфизм между алгеброй языка и алгеброй истинностных значений в многозначных логиках и функции оценки в крипковских семантиках, использующих только два значения.

$\vdash \subseteq S_n \times For$ между натуральными числами множества $S_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ и формулами логики, что имеет место следующая

Лемма. Если $x \vdash A$ и $x \leq y \in S_n$, то $y \vdash A$.

Пусть Var есть множество пропозициональных переменных. Роль оценок в \mathcal{K}_n выполняется отображением $F: Var \rightarrow 2^{S_n}$, таким, что отношение $\vdash_F, x \vdash_F p$, т.т.т., когда $x \in F(p)$, удовлетворяет лемме. Отношение \vdash_F расширяется на множество всех формул, соответствующих условиям, зависимым от связок. Тогда формула A является x -истинной в \mathcal{K}_n , $x \vdash A$, если $x \vdash_F A$ для произвольного F такого, как рассмотрено выше. Формула α является \mathcal{K}_n -истинной т.т.т., когда она истинна в точке 0, т.е. выполнено, что $0 \vdash A$. \mathcal{K}_n является семантикой системы, определенной данной матрицей \mathcal{M}_n , когда множество всех \mathcal{K}_n -истинных формул равно содержанию \mathcal{M}_n , т.е. когда

$$E(\mathcal{M}_n) = \{A \in For : 0 \vdash A\}.$$

Для n -значных логик Лукасевича \vdash должно удовлетворять следующим условиям:

$x \vdash A \rightarrow B$, т.т.т., когда для всяких $x+y \in S_n$ из $y \vdash A$

следует $x+y \vdash B$

$x \vdash \sim A$ т.т.т., когда $(n-2)-x \not\vdash A$

$x \vdash A \vee B$ т.т.т., когда $x \vdash A$ или $x \vdash B$

$x \vdash A \wedge B$ т.т.т., когда $x \vdash A$ и $x \vdash B$

$x \vdash A \equiv B$ т.т.т., когда $x \vdash A \rightarrow B$ и $x \vdash B \rightarrow A$.

Вместо приведения доказательства эквивалентности между этой моделью и матрицами Лукасевича посмотрим, каким образом Уркварт пытается установить связь между формальной семантикой и интуитивными соображениями.

Здесь множество точек (миров) $\{0, 1, \dots, n-1\}$ в модели интерпретируется как множество моментов времени, где 0 есть момент настоящего времени, а $n-1$ — последний элемент в S_n — зафиксирован в качестве некоторой будущей даты. Таким образом, « $x \vdash_F A$ » читается как « A доказуемо в момент x ». Высказывание может быть доказуемым или не доказуемым в данный момент. Например, высказывание о будущем событии может быть доказуемым или не доказуемым сейчас. Однако, если A доказуемо сейчас, то оно доказуемо и во все последующие моменты. Это означает, что мы думаем о высказываниях не как о неопределенных по времени (*temporally indefinite*) (например, «Сейчас Линкольн является пре-

зидентом»), а как об определенных по времени (temporally definite) (например, «Линкольн является президентом в 1971 году н.э.»). До сих пор наше неформальное объяснение, считает Уркварт, находится в соответствии с философской мотивировкой, данной в [Lukasiewicz 1930].

При описанной выше интерпретации импликация Лукасевича $A \rightarrow A$ доказуема в x , если и только если всегда, когда A доказуема в момент y , B доказуема в момент $x+y$ (т.е. в момент на x моментов отстоящий в будущее от y). Формула $\sim A$ доказуема в момент x , если и только если A не доказуема в момент, который на x моментов предшествует последнему моменту в нашем временном ряду. Таким образом, обе связки Лукасевича — «импликация» и «отрицание» — проявляют значительные отличия от обычных операторов импликации и отрицания.

Уркварт говорит, что такой способ понимания выявляет источники трудностей в достижении полностью интуитивной интерпретации многозначных логик Лукасевича, и он утверждает, что «естественные» связки импликации и отрицания скорее должны удовлетворять следующим стандартным условиям:

$x \vdash A \rightarrow B$ т.т.т., когда для некоторого $y \in S_n$ ($y \vdash B$ всегда, когда $x \leq y$ и $y \vdash A$),

$x \vdash \sim A$ т.т.т., когда $y \vdash A$ не верно для любого $y \in S_n$.

Обратим внимание на рецензию Д. Райна [Rine 1974], в которой содержательная интерпретация для E_n была подвергнута критике. Райн отмечает, что смысл леммы не всегда согласуется с синтаксисом естественного языка. Рассмотрим следующее утверждение α : «Джон играет в теннис»; и пусть $\{0, \dots, n\}$ обозначает временное пространство с того времени, когда Джон впервые играет в теннис (0), и до того времени, когда он последний раз играет в теннис (n). Тогда, продолжает Райн, не ясно, почему не могут существовать x, y , где $x < y$ такие, что A имеет место во всех $\{0, \dots, n-x\}$ и $\{n-y, \dots, n\}$, но не между $n-x$ и $n-y$.

Очень схожая семантика предложена Д. Скоттом в [Scott 1973]¹⁰, где он предлагает равенство вида « $v_i(A) = t$ », для $i \in \{0, \dots, n-1\}$, читать как «(утверждение) A истинно в степени i ». Скотт предполагает, что числа в ряду $0 \leq i \leq n-2$ символизируют *степени заблуждения в отклонении от истины* (degrees of error in deviation from the truth). Степень 0 — самая сильная и соответствует «совер-

¹⁰ На независимость своей интерпретации от семантики Уркварта Скотт специально обращает внимание в сноске 3 [Scott 1976: 73].

шенной» истине или отсутствию заблуждения: все тавтологии логики Лукасевича являются схемами утверждений, имеющих в качестве своей степени заблуждения 0. Таким образом, истинностные значения в логиках Лукасевича \mathbf{L}_n интерпретируются как степени заблуждения, а каждая \mathbf{L}_n есть *логика заблуждений* (logic of errors) [Scott 1976].

Проблемы возникают, когда в соответствии с данной интерпретацией истинностных значений мы пытаемся придать содержательный смысл логическим связкам из \mathbf{L}_n . На это указывается в [Smiley 1976].

В итоге мы приходим к тому, что любая *содержательная* интерпретация истинностных значений в \mathbf{L}_n сталкивается с серьезными трудностями. И еще большие трудности возникают, когда это содержание мы пытаемся перенести на интерпретацию логических связок \mathbf{L}_n . Все дело в том, и на это указывает сам А. Уркварт [Urquhart 1986: 106], что логика неопределенностей, логика вероятностей и логика заблуждений не являются истинностно-функциональными логиками, и поэтому любая подобная интерпретация \mathbf{L}_n не является адекватной. Напомним, что уже А. Прайор [Prior 1957b], интерпретируя \mathbf{L}_3 как логику случайности (т.е. третье истинностное значение интерпретируется как случайность), приходит к выводу, что при подобной интерпретации конъюнкция в \mathbf{L}_3 не может быть истинностно-функциональной. Итак, основная трудность содержательной интерпретации многозначных логик состоит в том, что, вкладывая содержание (смысл) в определенное множество истинностных значений, мы затем пытаемся совместить этот смысл с истинностно-функциональной семантикой многозначных логик. Что же касается непосредственно самой \mathbf{L}_n , то, как мы уже знаем из теоремы В.К. Финна (см. выше раздел 7.6.1), она имеет сугубо *теоретико-числовую природу* и связана со свойствами простых чисел.

Тем не менее, есть выход из создавшейся ситуации, если полагать, что мы разобрались с тем, что считать классическими истинностными значениями Т и Ф. Тогда представляется очень привлекательной идея проинтерпретировать многозначные логики, используя в явном виде именно эти два значения. Самое интересное, что впервые эта идея была высказана Э. Постом [Post 1921] и реализована для его же функционально полной логики \mathbf{P}_n . Позже подобным образом была проинтерпретирована А.Н. Прайором модальная логика S5 (см. выше раздел 8.4.2).

10.6. Т-Ф-последовательности в качестве истинностных значений

Вначале введем следующие понятия. Пусть $B = \{T, F\}$, т. е. B есть множество классических истинностных значений. Посредством B^s обозначим s -кратное прямое произведение множества B :

$$B^s = B \times B \times \dots \times B \text{ (} s \text{ сомножителей)}.$$

Тогда при $s \geq 2$ B^s есть множество всех Т-Ф-последовательностей (булевых векторов) длины s , которое записывается так:

$$B^s = \{ \langle a_1, \dots, a_s \rangle \mid a_i \in B, 1 \leq i \leq s \}.$$

Поскольку B есть двухэлементное множество, то число элементов множества B^s равно 2^s . Элементы множества B^s обозначим посредством α, β, γ с индексами или без них. Алгебра

$$\mathcal{A}^B = \langle B^s, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+ \rangle$$

есть булева алгебра, где операции $\neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+$ определяются на множестве B^s посредством булевых (т.е. классических) операций $\neg, \supset, \vee, \wedge$ следующим образом: для любых Т-Ф-последовательностей $\alpha = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ и $\beta = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$

$$\neg^+ \alpha = \langle \neg a_1, \dots, \neg a_s \rangle,$$

$$\alpha \supset^+ \beta = \langle a_1 \supset b_1, \dots, a_s \supset b_s \rangle,$$

$$\alpha \vee^+ \beta = \langle a_1 \vee b_1, \dots, a_s \vee b_s \rangle,$$

$$\alpha \wedge^+ \beta = \langle a_1 \wedge b_1, \dots, a_s \wedge b_s \rangle.$$

Поскольку компоненты a_i и b_i последовательностей α и β принимают классические истинностные значения Т и F (или 1 и 0), то указанные операции над компонентами — это просто логические операции над двоичными переменными. Тогда сами операции $\neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+$ естественно называть *покомпонентными* (булевыми) операциями.

Тогда в реконструированном виде интерпретация Поста для P_n выглядит следующим образом. Рассмотрим логическую матрицу

$$\mathfrak{M}_{s+1}^P = \langle B_F^s, \neg^P, \vee^+, \{T^s\} \rangle,$$

где B_F^s есть множество таких Т-Ф-последовательностей, где все вхождения F стоят в начале последовательности. Легко видеть, что число таких Т-Ф-последовательностей есть $s+1$ и равно числу истинностных значений логики P_n , т.е. $n = s+1$. $\{T^s\}$ есть одноэлементное множество выделенных значений, где T^s есть Т-Ф-

последовательность, состоящая только из вхождений T с числом s . Операция \vee^+ есть покомпонентная булева операция, а \neg^P определяется следующим образом:

$$\neg^P \langle F, F, \dots, F, T, T, \dots, T \rangle = \langle F, F, \dots, F, \neg T, T, \dots, T \rangle,$$

т.е. только первое вхождение T отрицается (напомним, \neg есть классическое отрицание); если вхождений T нет, то отрицаются все вхождения F .

Теорема 1. Логические матрицы $\mathfrak{M}_{s+1}^P = \langle B_F^S, \neg^P, \vee^+, \{T^S\} \rangle$ и $\mathfrak{M}_n^P = \langle \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \neg, \vee, \{n-1\} \rangle$ изоморфны, где \mathfrak{M}_n^P есть матрица для n -значной логики Поста (см. раздел 5.2.1).

Интерпретация Поста в какой-то степени осталась мало известной, но в [Byrd 1979] была предложена аналогичная интерпретация для многозначных логик Лукасевича \mathbb{L}_n .

Для этого вначале вводится одноместный оператор $d(\alpha)$, который преобразует T - F -последовательности из B^S таким образом, что все вхождения T предшествуют вхождениям F , т.е.:

$$d(\alpha) = \langle T, T, \dots, T, F, F, \dots, F \rangle.$$

Множество всех таких T - F -последовательностей обозначим посредством B_T^S . Элементы из B_T^S будем обозначать посредством α^T, β^T, \dots . Таким образом, $d(\alpha) = \alpha^T$.

Рассмотрим логическую матрицу

$$\mathfrak{M}_{s+1}^L = \langle B_T^S, \neg^d, \rightarrow^d, \{T^S\} \rangle,$$

где операции \neg^d и \rightarrow^d определяются следующим образом:

1. $\neg^d(\alpha^T) = d(\neg^+(\alpha^T))$.
2. $\alpha^T \rightarrow^d \beta^T = d(\alpha^T \supset^+ \beta^T)$.

Теорема 2. Логические матрицы $\mathfrak{M}_{s+1}^L = \langle B_T^S, \neg^d, \rightarrow^d, \{T^S\} \rangle$ и $\mathfrak{M}_n^L = \langle V_n, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$ изоморфны, где \mathfrak{M}_n^L есть матрица для n -значной логики Лукасевича \mathbb{L}_n (см. раздел 5.1.1).

Таким образом, имеется интерпретация истинностных значений, будь то натуральные числа или дробные, в терминах классических истинностных значений T и F . Например, истинностное значение 0 интерпретируется T - F -последовательностью, в которой все вхождения есть F ; $1/3$ — последовательностью $\langle T, F, F \rangle$, т.е. числитель указывает на число вхождений T , а знаменатель есть длина последовательности, обозначенная числом s ($= n-1$).

Обратим внимание, на то, что результат Теоремы 1 имеет также место, если множество истинностных значений B_T^S заменим на множество B_F^S , т.е. оператор d перерабатывает каждую Т-Ф-последовательность в такую, что все вхождения F стоят в начале¹¹. Тогда истинностное значение $1/3$ интерпретируется Т-Ф-последовательностью $\langle F, F, T \rangle$.

10.7. Фактор-семантика: подмножества *versus* элементы

Имеет смысл обобщить приведенную выше интерпретацию так, чтобы она строилась независимо от выбора множества Т-Ф-последовательностей в качестве истинностных значений. Такую интерпретацию мы назвали *фактор-семантикой* (см. [Karpenko 1983], [Карпенко 1989b])¹², где в качестве истинностных значений выступают *подмножества* множества Т-Ф-последовательностей. Строится она следующим образом.

С булевой алгеброй

$$\mathcal{A}^B = \langle B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+ \rangle$$

ассоциируем логическую матрицу

$$\mathfrak{M}_s^c = \langle B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+, \{T^S\} \rangle.$$

Последняя есть не что иное, как прямое произведение классической двужанной матрицы

$$\mathfrak{M}_2^c = \langle \{T, F\}, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{T\} \rangle$$

s раз на саму себя.

Для любого $\alpha \in B^S$ обозначим через $\eta(\alpha)$ число компонент элемента α , которые равны T . Тогда $\alpha \cong \beta$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ и B^S/\cong есть фактор-множество множества B^S по отношению эквивалентности \cong . Очевидно, что мощность множества B^S/\cong равна $s+1$. Если $\alpha \in B^S$, тогда $|\alpha|$ будет обозначать класс эквивалентности, определенный по α . Фактор-множество B^S/\cong снабдим операциями \neg^L и \rightarrow^L следующим образом: для $|\alpha|, |\beta| \in B^S/\cong$ пусть $\neg^L|\alpha| = |\neg^+\alpha|$ и $|\alpha| \rightarrow^L |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$, $\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' R^L \beta'$, причем отношение R^L определяется так: $\langle a_1, \dots, a_s \rangle R^L \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ т.т.т., когда

¹¹ Заметим, что крипковскую семантику А. Уркварта [Urquhart 1973] для L_n можно представить именно в таком виде, и соответственно крипковская семантика для P_n переводится в вышеприведенную.

¹² Заметим, что фактор-семантика была разработана независимо от работы М. Бёрда в [Karpenko 1979]. Автор выражает глубокую признательность В.М. Попову за обсуждение исходных идей фактор-семантики.

1) $\forall i \leq s (a_i = T \Rightarrow b_i = T)$, если $\eta(\alpha) \leq \eta(\beta)$,

2) $\forall i \leq s (b_i = T \Rightarrow a_i = T)$, если $\eta(\alpha) > \eta(\beta)$.

Заметим, что отношение R^L является отношением толерантности, т.е. оно рефлексивно и симметрично, но в общем случае не транзитивно. В этом обнаруживается еще один неожиданный аспект импликации Лукасевича.

Таким образом, после операции «факторизации» и определения логических операций на полученных классах эквивалентности матрица

$$\mathfrak{M}_s^c = \langle B^S, \neg^+, \supset^+, \vee^+, \wedge^+, \{T^S\} \rangle$$

преобразуется в матрицу

$$\mathfrak{N}_{s+1}^L = \langle B^S / \cong, \neg^L, \rightarrow^L, \{|T^S|\} \rangle$$

(операции дизъюнкции и конъюнкции как выражимые через исходные здесь опустим).

Теорема 3. Логические матрицы $\mathfrak{N}_{s+1}^L = \langle B^S / \cong, \neg^L, \rightarrow^L, \{|T^S|\} \rangle$ и $\mathfrak{M}_n^L = \langle V_n, \sim, \rightarrow, \{1\} \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Требуемый изоморфизм достигается посредством отображения φ такого, что для $|\alpha| \in B^S / \cong$

$$\varphi(|\alpha|) = \frac{\eta(\alpha)}{s}.$$

Очевидно, что φ есть взаимнооднозначное соответствие. Покажем, что изоморфизм имеет место, т.е.

$$(*) \quad \varphi(\neg^L |\alpha|) = \sim \varphi(|\alpha|),$$

$$(**) \quad \varphi(|\alpha| \rightarrow^L |\beta|) = \varphi(|\alpha|) \rightarrow \varphi(|\beta|).$$

Следующая последовательность равенств является доказательством (*):

$$\varphi(\neg^L |\alpha|) = \varphi(|\neg^+ \alpha|) = \frac{s - \eta(\alpha)}{s} = 1 - \frac{\eta(\alpha)}{s} = 1 - \varphi(|\alpha|) = \sim \varphi(|\alpha|).$$

Для доказательства (**) возьмем $\alpha' \in |\alpha|$ и $\beta' \in |\beta|$ такие, что $\alpha' R \beta'$.

(1) $\eta(\alpha) \leq \eta(\beta)$. Тогда очевидно, что правая часть (**) равна 1. Далее, $|\alpha| \rightarrow^L |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'| = |T^S|$. Следовательно, левая часть (**) равна $\varphi(|T^S|) = 1$, что и требовалось доказать.

(2) $\eta(\alpha) > \eta(\beta)$. Тогда правая часть (**) в силу определения φ и \rightarrow равна $1 - \frac{\eta(\alpha)}{s} + \frac{\eta(\beta)}{s}$. Но согласно определению \rightarrow^L и \supset^+ чис-

ло вхождений T в $\alpha' \supset^+ \beta'$ равно $\eta(\beta) + (s - \eta(\alpha))$. Следовательно, левая часть $(**)$ также равна $1 - \frac{\eta(\alpha)}{s} + \frac{\eta(\beta)}{s}$.

Таким образом, логическая матрица

$$\mathfrak{M}_{s+1}^L = \langle B^s / \cong, \neg^L, \rightarrow^L, \{|T^s|\} \rangle$$

является характеристической для n -значного исчисления логики Лукасевича L_n .

Главный смысл фактор-семантики заключается в том, что теперь в качестве истинностных значений выступают определенные подмножества s -членных Т-Ф-последовательностей из множества B^s . Например, истинностное значение $1/3$ интерпретируется множеством $\{\langle T, F, F \rangle, \langle F, T, F \rangle, \langle F, F, T \rangle\}$.

В общем случае мощность множества $|\alpha| \in B^s / \cong$ вычисляется по формуле для биномиальных коэффициентов

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

В нашем случае $k = \eta(\alpha)$ и $m = s$. Тогда, например, мощность множества $|\alpha|$, состоящего из Т-Ф-последовательностей длиной $s = 5$, в каждую из которых число вхождений T есть $\eta(\alpha) = 3$, равно 10.

Рассмотрим еще один пример фактор-семантики, в данном случае для n -значной логики Клини K_n (см. раздел 5.1.1; примечание 1), представленную матрицей

$$\mathfrak{M}_n^K = \langle V_n, \sim, \supset, \{1\} \rangle.$$

Операции \vee и \wedge определяются обычным образом посредством \sim и \supset .

Определим матрицу \mathfrak{M}_{s+1}^K следующим образом. Пусть $\eta_T(\alpha)$ обозначает число вхождений T в α и $\eta_F(\alpha)$ обозначает число вхождений F в α . Тогда отношение R^K на множестве B^s определяется так: $\langle a_1, \dots, a_s \rangle R^K \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ т.т.т., когда

$$1) \forall i \leq s (a_i = T \Rightarrow b_i = F), \text{ если } \eta_T(\alpha) \leq \eta_F(\beta),$$

$$2) \forall i \leq s (b_i = F \Rightarrow a_i = T), \text{ если } \eta_T(\alpha) > \eta_F(\beta).$$

Заметим, что отношение R^K в общем случае нереплексивно, симметрично и в общем случае нетранзитивно.

Матрицу \mathfrak{M}_{s+1}^K определим следующим образом:

$$\mathfrak{M}_{s+1}^K = \langle B^s / \cong, \neg^L, \rightarrow^K, \{|T^s|\} \rangle,$$

где $|\alpha| \rightarrow^K |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$, $\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' R^K \beta'$.

В результате имеем:

Теорема 4. *Логические матрицы \mathfrak{M}_{s+1}^K и \mathfrak{M}_n^K изоморфны.*

Доказательство аналогично Теореме 3.

Из этих двух примеров фактор-семантики видно, что между множеством двухместных операций фактор-матрицы и множеством отношений на множестве B^S существует функциональное соответствие, которым в каждом конкретном случае и определяются свойства логической фактор-матрицы. На вопрос о том, что будет, если это множество отношений пусто, отвечает

Теорема 5. *Фактор-матрица $\mathfrak{M}_{s+1}^q = \langle B^S/\cong, \neg^L, \rightarrow^q, \vee^q, \wedge^q, \{T^S\} \rangle$ есть модель для обобщенной квази-истинностно-функциональной логики Н. Решера [Rescher 1962].*

Обратим внимание, что здесь при определении операций на элементах множества B^S/\cong никакое отношение R не вводится. Это значит, что функции \rightarrow^q , \vee^q , и \wedge^q не являются операциями на множестве B^S/\cong . В трехзначной квази-истинностно-функциональной логике Решера \mathbb{L}_3^q [Rescher 1969: 170-171], например, $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \{\frac{1}{2}, 1\}$. Таким образом, смысл вводимых отношений на множестве B^S заключается в том, чтобы функции, определяемые на множестве B^S/\cong , были операциями.

В связи с этим возникает естественный вопрос о границах применения фактор-семантики. Очевидно, что средства фактор-семантики недостаточны для определения операции $|\alpha| \otimes |\beta|$, не сохраняющей $|T^S|$ и $|F^S|$. Точно так же это имеет место и для унарных операций, т.е. мы не можем проинтерпретировать многозначную логику, связки которой не сохраняют истинностные значения 1 и 0, т.е. не являющейся С-расширяющей. Это следует из того, что в основе определения всех операций на элементах множества B^S/\cong лежат покомпонентные булевы операции. Поэтому интерпретация Поста не является булевой, поскольку нельзя циклическое отрицание Поста определить покомпонентным булевым отрицанием без таких искусственных ограничений, вроде тех, что отрицается только первое вхождение Т. Из унарных операций покомпонентно определяется только отрицание Лукасевича (инволюция). Таким образом, для построения фактор-семантики исходные операции многозначной логики должны удовлетворять указанным выше требованиям.

Этим требованиям также отвечает максимальная непостовская логика T_n^* . Пусть отношение R^{T^*} на множестве B^S определяется так: $\langle a_1, \dots, a_s \rangle R^{T^*} \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ т.т.т., когда

1) $\exists i \leq s (a_i = T \Rightarrow b_i = F)$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$,

2) $\alpha R^L \beta$ в остальных случаях.

Матрицу $\mathfrak{M}_{s+1}^{T^*}$ определим следующим образом:

$$\mathfrak{M}_{s+1}^{T^*} = \langle B^S / \cong, \neg^L, \Rightarrow^{T^*}, \{|T^S|\} \rangle,$$

где $|\alpha| \Rightarrow^{T^*} |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$, $\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' R^{T^*} \beta'$.

В результате имеем:

Теорема 6. Логические матрицы $\mathfrak{M}_{s+1}^{T^*} = \langle B^S / \cong, \neg^L, \Rightarrow^{T^*}, \{|T^S|\} \rangle$ и $\mathfrak{M}_n^{T^*} = \langle V_n, \sim, \rightarrow^{T^*}, \{1\} \rangle$ изоморфны.

Итак, фактор-семантика представляет собой интерпретацию многозначных логик средствами булевой алгебры, и этим определяются ограничения на применение самой фактор-семантики. Чтобы убрать эти ограничения, требуется другое семантическое основание для интерпретации. Такая универсальная семантика была предложена в [Rasiowa 1974b], где в качестве семантического основания для интерпретации конечнозначных логик была взята алгебра Поста.

Возникает еще один вопрос, можно ли распространить фактор-семантику на бесконечнозначный случай?

10.7.1. Фактор-семантика для бесконечнозначной логики L_Σ

В основном для бесконечнозначных логик используются модели с множеством истинностных значений, обладающим свойством непрерывности или свойством плотности (см. гл. 8 и 9). Исключением является стандартная дискретная модель для логики RM. Здесь мы рассмотрим нестандартную дискретную модель для единственного предтабличного расширения L_∞ .

Пусть, как и ранее, $B = \{T, F\}$, т.е. B есть множество классических истинностных значений. Посредством B^{\aleph_0} обозначим прямое произведение \aleph_0 раз одинаковых множеств, равных B :

$$B^{\aleph_0} = B \times B \times \dots \times B \text{ } (\aleph_0 \text{ сомножителей}).$$

Поскольку B есть двухэлементное множество, то число элементов множества B^{\aleph_0} равно 2^{\aleph_0} , т.е. мощность этого множества есть континуум. Из этого множества выбросим те T-F-последова-

тельности, в которых число вхождений T , как и число вхождений F , одинаково счетно. Полученное в результате множество (обозначим его посредством $Fin(\omega)$), есть такое множество бесконечных T - F -последовательностей из B^{\aleph_0} , в которых или число вхождений T конечно (или равно 0), или число вхождений F конечно (или равно 0). Очевидно, что мощность множества $Fin(\omega)$ *счетна*. Элементы множества $Fin(\omega)$ будем обозначать посредством α, β, γ с индексами или без них, но при этом обозначения α_T и α_F указывают на то, что число вхождений T или F конечно (или равно 0).

Для любого $\alpha \in Fin(\omega)$ пусть $\eta(\alpha)$ есть конечное число вхождений T или F в α , такое, что

$$\eta(\alpha) = \begin{cases} m, & \text{если } \alpha \text{ есть } \alpha_T \\ -m, & \text{если } \alpha \text{ есть } \alpha_F, \end{cases}$$

где $m, -m \in \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} — множество целых чисел). Тогда $\alpha \cong \beta$, если $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ и $Fin(\omega)/\cong$ есть фактор-множество по отношению эквивалентности \cong .

Теперь элементы множества $Fin(\omega)/\cong$ упорядочим *естественным* образом по числу нарастания вхождений T для классов, где число вхождений F бесконечно, и по числу убывания вхождений F для классов, где число вхождений T бесконечно. В результате полученное множество чисел, представляющее классы эквивалентности из $Fin(\omega)/\cong$ (обозначим его посредством Σ) есть множество с порядковым типом $\omega + \omega^*$, т. е.

$$\Sigma = \{0^+, 1, 2, 3, \dots, \dots, -3, -2, -1, 0^-\}.$$

Именно на этом пути была получена следующая логическая матрица [Карпенко 1985]:

$$\mathfrak{M}_\Sigma = \langle \Sigma, \sim^\Sigma, \rightarrow^\Sigma, \{0^-\} \rangle.$$

Логические операции определяются так:

$$\sim^\Sigma x = -x,$$

$$x \rightarrow^\Sigma y = \begin{cases} 0^-, & \text{если } x \leq y \\ y - x, & \text{если } x > y, \end{cases}$$

где « $-$ » есть операция арифметического вычитания, причем $\sim^\Sigma 0^+ = 0^-$ и $\sim^\Sigma 0^- = 0^+$.

Нетрудно проверить, что все аксиомы бесконечнозначной логики Лукасевича L_∞ общезначимы в этой матрице, т.е. матрица

$\mathfrak{M}_\Sigma = \langle \Sigma, \sim^\Sigma, \rightarrow^\Sigma, \{0^-\} \rangle$ является дискретной моделью для \mathbf{L}_∞ . Заметим, что эта модель является моделью без неподвижных точек относительно отрицания, т.е. $\sim^\Sigma x \neq x$. Логику, для которой матрица \mathfrak{M}_Σ является характеристической, обозначим посредством \mathbf{L}_Σ .

Для этой логики имеет место фактор-семантика, которая строится аналогично тому, как это было сделано для \mathbf{L}_n (см. также [Karpenko 1988] и [Karpenko 1989b]).

Рассмотрим следующую логическую матрицу

$$\mathfrak{M}_{Fin(\omega)} = \langle Fin(\omega)/\cong, \sim^L, \rightarrow^L, \{|T^\omega|\} \rangle,$$

где множество истинностных значений $Fin(\omega)/\cong$ определено выше; $\{|T^\omega|\}$ есть множество выделенных значений, которое представляет собой одноэлементное множество, состоящее из последовательности, в которую входят только Т. Операции \sim^L и \rightarrow^L на множестве $Fin(\omega)/\cong$ определяются следующим образом (здесь операции \neg^+ и \supset^+ — обычные булевы покомпонентные операции): для $|\alpha|, |\beta| \in Fin(\omega)/\cong$ пусть $\sim^L |\alpha| = |\neg^+ \alpha|$ и $|\alpha| \rightarrow^L |\beta| = |\alpha' \supset^+ \beta'|$, где $\alpha' \in |\alpha|$, $\beta' \in |\beta|$ и $\alpha' R^\Sigma \beta'$, причем отношение R^Σ на элементах $Fin(\omega)$ определяется так: $\langle a_1, \dots, a_\omega \rangle R^\Sigma \langle b_1, \dots, b_\omega \rangle$ т.т.т., когда

- 1) $\forall i (a_i = T \Rightarrow b_i = T)$, если $\eta(\alpha_T) \leq \eta(\beta_T)$ или α есть α_T и β есть β_F ,
- 2) $\forall i (b_i = F \Rightarrow a_i = F)$, если $\eta(\alpha_F) \leq \eta(\beta_F)$,
- 3) $\forall i (b_i = T \Rightarrow a_i = T)$, если $\eta(\alpha_T) > \eta(\beta_T)$ или α есть α_F и β есть β_T ,
- 4) $\forall i (a_i = F \Rightarrow b_i = F)$, если $\eta(\alpha_F) > \eta(\beta_F)$.

Теорема 7. Матрицы $\mathfrak{M}_\Sigma = \langle \Sigma, \sim^\Sigma, \rightarrow^\Sigma, \{0^-\} \rangle$ и $\mathfrak{M}_{Fin(\omega)} = \langle Fin(\omega)/\cong, \sim^L, \rightarrow^L, \{|T^\omega|\} \rangle$ изоморфны.

Таким образом, истинностные значения матрицы \mathfrak{M}_Σ интерпретируются определенными счетными подмножествами из множества $Fin(\omega)/\cong$. Например, число 3 обозначает счетное множество Т- \mathbf{F} -последовательностей, в которые Т входит по три раза в каждую, а число вхождений \mathbf{F} бесконечно. Соответственно, -3 обозначает счетное множество Т- \mathbf{F} -последовательностей, в которые \mathbf{F} входит по три раза в каждую, а число вхождений Т бесконечно. В свою очередь, 0^+ интерпретируется одноэлементным множеством $|F^\omega|$, а 0^- — одноэлементным множеством $|T^\omega|$.

Обратим внимание на следующий интересный результат В.Л. Васюкова [Vasyukov 1993]: \mathbf{L}_∞ полна относительно тернарной семантики Крипке с оценкой в матрице \mathfrak{M}_Σ .

В [Карпенко 1997: 133] аксиоматизация \mathbf{L}_Σ поставлена в виде открытой проблемы, а в [Карпенко 2000: 272] предложено следующее решение.

Напомним, что исчисление \mathbf{L} называется *предтабличным*, если все его собственные расширения табличны, т.е. являются конечнотабличными логиками. Легко видеть, что наша логическая матрица \mathcal{M}_Σ есть не что иное, как линейно-упорядоченная MV -алгебра Чэна, которую он обозначает посредством C и приводит в качестве примера *непредставимой* MV -алгебры [Chang 1958b: 474]. Ю. Комори [Komori 1981] обобщает алгебру C на случай S_n^ω ($n = 1, 2, 3, \dots$), где S_1^ω как раз и есть C . В [Rose 1953] было показано, что каждое собственное расширение \mathbf{L}_∞ является конечно-аксиоматизируемым. Из нового доказательства этой теоремы, предложенного Комори, можно извлечь следующую характеристическую аксиому для S_1^ω :

$$[(p \rightarrow (p \rightarrow \sim p)) \rightarrow ((\sim p \rightarrow p) \rightarrow (\sim p \vee p))].$$

Таким образом, \mathbf{L}_Σ есть расширение \mathbf{L}_∞ за счет данной аксиомы.

Как уже отмечалось, из [Beavers 1993b: 261] следует, что существует только одно предтабличное расширение \mathbf{L}_∞ . Это расширение есть логика \mathbf{L}_Σ .

10.8. Структурализация истинностных значений

Обратим внимание на тенденцию развития современной многозначной логики, которая заключается в том, что происходит *структурализация* истинностных значений (см. [Карпенко 1997, гл. 10]). Мы бы сказали, что первый этап структурализации истинностных значений заключается в том, что в качестве истинностных значений выступают не «точечные» элементы, а подмножества некоторого исходного множества истинностных значений.

Наиболее простым примером являются подмножества классического множества истинностных значений $\{T, F\}$. Дж. Данну принадлежит идея отождествления четырех истинностных значений T, B, N, F с четырьмя подмножествами множества $\{T, F\}$, которое обозначается посредством $\mathcal{P}(\{T, F\})$. В развернутом виде этот подход изложен им в [Dunn 1976] и связан с построением семантики для первопорядкового следования. О развитии этой идеи Н. Бенапом см. выше в разделе 5.4.4. Особо стоит отметить, что семантика, предложенная Дж. Данном, была распространена Р. Раутли [Routley 1984] на полные системы релевантных логик таким образом, что в каждом возможном мире значениями высказы-

ваний являются подмножества множества $\{T, F\}$. Этот подход был развит в работе [Restal 1995].

Поскольку релевантная логика тесно связана с паранепротиворечивой логикой, то для последней также используется семантика, где истинностными значениями являются подмножества множества $\{T, F\}$ [Priest 1984b]. Имеется целый ряд работ, где используются подобные истинностные значения, например, для решения парадокса «лжец» [Visser 1984].

Интересно посмотреть, что представляет собой обобщение такой семантики, т.е. когда в качестве истинностных значений берутся подмножества более богатого множества, чем $\{T, F\}$. На это указывалось в [Карпенко 1989с: 46], где отмечалось, что в [Pappinghaus and Wirsing 1983] рассматривается индетерминистский язык программирования, где формулы такого языка интерпретируются посредством непустого подмножества из $\{T, U, F\}$, где U в свою очередь интерпретируется как «неопределенно». Напомним, что в [Zaitsev 2009] в качестве истинностных значений берется множество всех подмножеств трехзначной логики Клини K_3 .

Уже в [Shramko, Dunn and Takenaka 2001] и [Шрамко 2002] в качестве истинностных значений берется множество всех подмножеств множества $\mathcal{P}(\{T, F\})$. Как указывается в этих работах, это приводит к идее *обобщенного истинностного значения* как подмножества некоторого базисного множества значений. Конечно, возможны и дальнейшие обобщения (см. [Ванзинг и Шрамко 2005]).

На самом деле первым «не точечным» представлением истинностных значений является матрица, полученная из алгебры Линденбаума (см. раздел 4.5), в которой элементы предстают в виде счетного множества эквивалентных формул.

Обратим также внимание на то, что *булевозначные модели* для теории множеств рассматриваются как многозначные логики [Mostowski 1968, лекция V]. Соответственно многозначными логиками являются и *гейтинговозначные модели*. В первом случае формулам приписываются в качестве истинностных значений элементы булевых алгебр, а во втором — элементы псевдобулевых алгебр. Тогда в силу теоремы представления Стоуна для булевых алгебр формулам классической логики приписываются подмножества некоторого универсального множества, а формулам интуиционистской логики приписываются открытые множества топологических пространств [Расёва и Сикорский 1972]. В последнем случае в то-

топологических моделях M истинностные значения сложных формул определяются так:

$$v(B \wedge C) = v(B) \cap v(C), v(B \vee C) = v(B) \cup v(C),$$

$$v(B \supset C) = \text{Int}(v(\bar{B}) \cup v(C)), v(\neg B) = \text{Int}(v(\bar{B})),$$

$$v(\forall x B(x)) = \text{Int}(\cap_{a \in M} v(B(a))),$$

$$v(\exists x B(x)) = \cup_{a \in M} (B(a)).$$

где $\text{Int}(X)$ обозначает внутренность множества X .

Заметим, что в каждом случае теорема типа стоуновского представления дает косвенным образом ту или иную теоретико-множественную или топологическую интерпретацию истинностных значений.

Параллельно с этим структурализацию истинностных значений дает нам категорный анализ логики [Голдблатт 1983], который позволяет посмотреть на проблему истинностных значений как бы «извне».

Категория Set является топосом и имеет два истинностных значения: Т и F.

Категория $\text{Bn}(J)$ (категория всех расслоений над J) является топосом и может иметь бесконечно много истинностных значений, если множество J бесконечно. Но самое главное, что этими истинностными значениями являются все подмножества J .

Категория $\text{Top}(J)$ пучков над J является топосом и истинностными значениями здесь являются открытые подмножества пространства над J .

В первых двух примерах множество истинностных значений, которое называется классифицирующим объектом, представляет собой булеву алгебру; в последнем примере — алгебру Гейтинга. Несомненна связь между топосами и булевозначными и гейтинговозначными моделями. В других категориях, являющихся топосами, истинностными значениями могут быть самые неожиданные объекты, например, главные идеалы в категории $M\text{-Set}$ для данного моноида M .

Итак, в качестве истинностных значений могут выступать различные (четкие) подмножества некоторого множества, или элементы различных топологических пространств, например истинностными значениями в непрерывных логиках [Chang and Keisler 1966] являются элементы компактного хаусдорфова пространства. В свою очередь, как мы видели, в нечеткозначной логике Л. Заде высказываниям приписываются нечеткие подмножества из интервала $[0, 1]$, т. е. элементы множества $\mathcal{P}([0, 1])$ (см. раздел 9.3.1).

Более наглядный пример структурализации истинностных значений дает нам фактор-семантика для n -значных логик, где в качестве истинностных значений выступают подмножества множества T - F -последовательностей (булевых векторов) конечной или бесконечной длины. Обратимся к последнему случаю [Карпенко 1989b].

Рассмотрим элементы множества $Fin(\omega)/\cong$ (см. предыдущий раздел). Пусть $\alpha_i, \alpha_j \in |\alpha^T|$, где $|\alpha^T| \in Fin(\omega)/\cong$. Для любых двух элементов из $|\alpha^T|$ введем отношение лексиграфического порядка $\alpha_i < \alpha_j$, т.е. произведем упорядочение по принципу первого различия. Пусть $T < F$ и пусть $\alpha_i = (a_1, \dots, a_n, \dots)$ и $\alpha_j = (b_1, \dots, b_n, \dots)$. Тогда $(a_1, \dots, a_n, \dots) < (b_1, \dots, b_n, \dots)$ означает, что для некоторого k , $a_k < b_k$ и $a_m = b_m$ для всех $m < k$.

Как известно, отношение лексиграфического порядка является отношением линейного порядка, а множество, упорядоченное таким образом, называется *цепью*. Из результата М. Даммитта [Dummett 1959], который берется в качестве определения А. Хорном [Horn 1969: 395], следует, что алгебраическая структура цепи с первым и последним элементом (в качестве последнего элемента может выступать порядковое число ω) есть линейно-упорядоченная алгебра Гейтинга (L -алгебра), т.е. алгебра Гейтинга с законом линейности (см. раздел 8.2.3.1). Здесь эту алгебру обозначим посредством LH . Таким образом, каждый элемент $|\alpha^T| \in Fin(\omega)/\cong$, упорядоченный отношением лексиграфического порядка $<$, есть LH -алгебра с первым элементом α_i и последним элементом α_ω , т.е.

$$LH = \langle |\alpha^T|, \vee, \wedge, \Rightarrow, \alpha_i, \alpha_\omega \rangle, \text{ где}$$

$$\alpha_i \vee \alpha_j = \max(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \wedge \alpha_j = \min(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \Rightarrow \alpha_j = \begin{cases} \alpha_\omega, & \text{если } \alpha_i \leq \alpha_j, \\ \alpha_j, & \text{если } \alpha_i > \alpha_j. \end{cases}$$

Теперь двойственным образом определим отношение лексиграфического порядка $<$ для элементов $\alpha_i, \alpha_j \in |\alpha^F|$, где $|\alpha^F| \in Fin(\omega)/\cong$. В этом случае $F < T$ и первый элемент α_1 является наибольшим. Определяя двойственным образом операции на элементах из $|\alpha^F|$, получим линейно-упорядоченную алгебру, двойственную (double) к LH -алгебре. Такую алгебру назовем линейно-упорядоченной алгеброй Брауэра (LB -алгеброй):

$$LB = \langle |\alpha^F|, \vee, \wedge, \Leftarrow, \alpha_i, \alpha_\omega \rangle, \text{ где}$$

$$\alpha_i \vee \alpha_j = \min(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \wedge \alpha_j = \max(\alpha_i, \alpha_j),$$

$$\alpha_i \Leftarrow \alpha_j = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } \alpha_i \leq \alpha_j, \\ \alpha_j, & \text{если } \alpha_i > \alpha_j. \end{cases}$$

В итоге мы получили, что в качестве множества истинностных значений для бесконечнозначной логики \mathbf{L}_Σ (см. предыдущий раздел) выступает объединение счетных множеств LH - и LB -алгебр. Отсюда можно сделать вывод, что в основе алгебраической структуры \mathbf{L}_Σ лежит линейная дважды гейтингова алгебра. Последние под названием « P -алгебр» изучаются в [Epstein and Horn 1974].

Обратим внимание, что импликацию логики \mathbf{L}_Σ можно определить следующим образом:

$$x \rightarrow^\Sigma y = (x \Rightarrow y) + \sim(y \Leftarrow x),$$

или, что то же самое:

$$x \rightarrow^\Sigma y = (x \Rightarrow y) + (\sim y \Rightarrow \sim x),$$

где $+$ есть операция арифметического сложения и $0^+ + 0^+ = 0^+$, $0^- + 0^- = 0^-$.

Пусть \mathcal{A} есть объединение счетных множеств абстрактных LH - и LB -алгебр. Заметим, что множество \mathcal{A} может быть линейно упорядочено теоретико-категорными средствами, если взять множество \mathcal{A} как множество объектов такой категории. В этом случае вырожденная LH -алгебра 0 и вырожденная LB -алгебра 1 являются подобъектом и фактор-объектом этой категории соответственно. Теперь обычным образом можно определить операции \Rightarrow и \Leftarrow на элементах множества \mathcal{A} . Тогда для любых $X, Y \in \mathcal{A}$

$$X \rightarrow^A Y = (X \Rightarrow Y) \oplus \sim^A(Y \Leftarrow X),$$

где \oplus , есть моноидная операция¹³, а операция отрицания \sim^A переводит LH -алгебру в LB -алгебру, и наоборот. Отсюда становится ясной роль двойственных алгебр.

Рассмотрим логическую матрицу $\mathfrak{M}_A = \langle \mathcal{A}, \sim^A, \rightarrow^A, \{1\} \rangle$. Примером матрицы \mathfrak{M}_A является матрица \mathfrak{M}_Σ (см. выше). Таким образом, в матрице \mathfrak{M}_Σ истинностные значения, состоящие из множества положительных и отрицательных чисел (с двумя нулями), интерпретируются соответственно линейно-упорядоченными алгебрами Гейтинга и Брауэра.

¹³ См. понятие «симметрического моноида Гейтинга» в разделе 8.3.1.

Из рассмотренного выше можно сделать по крайней мере два важных вывода. Во-первых, логика имеет два алгебраических уровня. Первый уровень (внутренний) — это алгебраические структуры истинностных значений в данной логике. Для бесконечнозначной логики \mathbf{L}_Σ , как мы видели, такими структурами являются LH - и LB -алгебры. В общем случае в качестве истинностных значений могут выступать различные алгебры [Карпенко 1986] и тогда возникает глобальная проблема определения логических операций на алгебрах. Операции на алгебрах определяют второй (внешний) уровень логики, а именно алгебру самой логики. В нашем примере это P -алгебра с моноидной операцией \oplus на ней и инволюцией. В итоге возникает интересная проблема взаимоотношения этих двух уровней. Операции на алгебрах непосредственно приводят к категорному рассмотрению логики и построению топоса для нее. Так, в случае с \mathbf{L}_Σ классификатором подобъектов является объединение счетных множеств LH - и LB -алгебр.

Во-вторых, из [Horn 1969] следует, что LH -алгебра является соответствующей алгеброй для линейной интуиционистской логики \mathbf{LC} . Таким образом, логику \mathbf{L}_Σ можно представить как логическое исчисление, в котором пропозициональные переменные пробегают по \mathbf{LC} и дуальным к ним исчислениям, т.е. сама логика выступает в качестве истинностного значения [Karpenko 1987]. Философский смысл этого состоит в том, что рассуждения человека или работу компьютера можно было бы представить не в рамках некоторой логики, а как рассуждение целыми логическими системами с логическими операциями над ними.

Итак, что же такое логика? И здесь мы возвращаемся к определению логики, данному Лукасевичем [Łukasiewicz 1921: 90]): «Логика есть наука об объектах специального вида, а именно наука о логических значениях», т. е. наука об истинностных значениях.

Таким образом, применительно к многозначной логике из четырех основных определений: логика как исчисление, логика как алгебра, логика как функциональная система и логика как наука об истинностных значениях, мы выбираем последнее.

И в этом кроется глубокий философский смысл.

ПРИЛОЖЕНИЕ: БУЛЕВЫ РЕШЕТКИ ИМПЛИКАТИВНЫХ ЛОГИК

Импликативные логики, т.е. логики, в которых единственной логической связкой является импликация \rightarrow , по вполне понятным причинам всегда вызывали особый интерес. Периодически делались попытки классифицировать импликативные логики, но всегда наталкивались на проблему расширения интуиционистской импликации \mathbf{H}_\rightarrow до классической \mathbf{TV}_\rightarrow .¹ Для решения этой проблемы требуется метод доказательства независимости аксиом, использующий многозначные логические матрицы (см. выше раздел 2.3). В результате будут построены различные булевы решетки наиболее интересных импликативных логик (см. [Karpenko 2000a]).

1. Проблема классификации импликативных логик. Комбинаторы

В [Смирнов 1979] проведена двоякая классификация импликативных систем: по виду теорем дедукции и по структурным правилам в секвенциальной форме.

Однако В.А. Смирнов в этой статье обращает внимание на ту важную проблему, что оба способа классификации не охватывают классической логики. В первом случае теорема дедукции, которая имеет место для интуиционистской логики, имеет место также и для классической, т.е. не различает первую от второй. Во втором случае — нет такого структурного правила, которое отвечало бы за переход от интуиционистской импликации к классической.

В гильбертовских исчислениях переход от интуиционистской импликации \mathbf{H}_\rightarrow к классической \mathbf{TV}_\rightarrow обычно осуществляется за счет добавления закона Пирса

$$((p \supset q) \supset p) \supset p.$$

Но структурного правила, соответствующего этой формуле, не существует, а переход от интуиционистской логики к классической осуществляется трансформацией односукцедентного секвенциального исчисления в многосукцедентное.

¹ Ранее классическая логика обозначалась нами посредством \mathbf{C}_2 , а интуиционистская логика посредством \mathbf{Int} .

К классификации импликативных логик можно подойти с совершенно иной стороны, используя свойства базисных (исходных) комбинаторов I , B , C , W , K и S , впервые введенных М. Шейнфинкелем в 1924 г. (см. Шейнфинкель 2009)], а затем Х. Карри (см. [Curry and Feys 1958]). Комбинаторы можно рассматривать как простейшие операции, которые переставляют местами, берут в скобки, сокращают и/или воспроизводят термины, к которым они применены, т.е.

$$\begin{array}{ll} I\ x = x, & W\ xy = xyy, \\ B\ xyz = x(yz), & K\ xy = x, \\ C\ xyz = xzy, & S\ xyz = xz(yz). \end{array}$$

для произвольных терминов x , y , z . Из исходных комбинаторов получают другие комбинаторы, например B' $xyz = x(zy)$ ($= CB$), K' $xy = y$ ($= CK$), I' $xy = yx$ ($= CI$). Следующие исходные множества комбинаторов $\{B, C, W, K\}$, $\{B', W, K\}$, и $\{S, K\}$ являются эквивалентными и для последнего (а значит и для остальных) доказана комбинаторная полнота, т.е. все другие возможные комбинаторы можно построить из исходных (см. [Curry and Feys 1958: 189] и [Энгелер 1987: 96-97]). Оказалось, что между комбинаторами и импликативными формулами существует однозначное соответствие. Главным результатом этого соответствия является следующий важный факт: полное множество исходных комбинаторов определяет собой импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики \mathbf{H}_{\rightarrow} .² В силу указанного соответствия (оно еще называется *изоморфизмом Карри-Ховарда*) можно классифицировать импликативные логики посредством комбинаторов, и наоборот, и, главное, изучать свойств импликативных логик, используя свойства комбинаторов и свойства λ -исчисления (см. [Bunder 2002]).

Однако эта классификация, как и классификация В.А. Смирнова, не охватывает классической импликативной логики $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$, поскольку нет такого комбинатора, который соответствовал бы закону Пирса и вообще любой *неинтуиционистской* импликативной

² Уже Гильбертом в 1922 г. была построена логическая система, получившая название «позитивная импликативная логика», которая в качестве импликативных формул содержит аксиомы B , C , W , K . Из доказательства М. Вайсберга [Wajsberg 1938] об *отделимости* импликации в интуиционистской логике следует, что система Гильберта есть \mathbf{H}_{\rightarrow} . Для гильбертовского исчисления \mathbf{L} *отделимость* связок имеет место, если для любой доказуемой формулы в \mathbf{L} существует ее доказательство, которое использует только аксиомы для импликации и аксиомы для других логических связок, действительно входящих в эту формулу.

формуле. Это объясняет главную цель работы [Gabbay and de Queiroz 1992]: распространить изоморфизм Карри-Ховарда до TV_{\rightarrow} , т.е. сконструировать такой “комбинатор” P , который соответствовал бы закону Пирса.

Итак, перед нами стоит следующая исходная проблема: найти единое основание для классификации импликативных логик. Пусть \mathcal{L} есть пропозициональный язык, единственной логической связкой которого является импликация \rightarrow . Под *импликативной логикой* будем понимать множество всех правильно построенных формул, замкнутое относительно правил МР и постановки.

2. Решетка импликативных логик $L(H_{\rightarrow})$

Решение проблемы мы видим в построении такой *логической конструкции*, которая позволит из ее элементов конструировать искомые импликативные логики. Более того, при применении к самой конструкции простейших *операций* можно будет получать (порождать) новые логики и даже целые их классы.

В качестве *элементарных объектов*, из которых будет строиться конструкция, возьмем следующие импликативные формулы, которые для удобства будем обозначать посредством соответствующих комбинаторов:

I. $(p \rightarrow p)$ (тождество)

B. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (слабая транзитивность)

C. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (перестановка).

W. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (сокращение)

K. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (утверждение консеквента).

Операциями являются два логических правила вывода: *modus ponens* и *подстановка*.

Доказуемость формулы A будем обозначать посредством $\vdash A$. Сами доказательства будем записывать способом, предложенным Я. Лукасевичем в [Łukasiewicz 1929], однако в наших обозначениях. Каждый доказанный тезис будет иметь свой номер и предшествующую строку доказательства, которая состоит из двух частей, разделенных звездочкой *. Слева стоит формула (или ее номер), в которую произведена подстановка и которая является большой посылкой. Справа указывается малая посылка, которая также может быть получена за счет подстановки. Результат применения МР ука-

зывается посредством тире, затем указывается номер новой формулы. Например, докажем

Утверждение 1. $I, C \vdash I'$.

1. I .

2. C .

$$2 \ p/p \rightarrow q, q/p, r/q * 1 \ p/p \rightarrow q - 3,$$

$$3. \ p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q) (=I').$$

Теперь самое главное. Основным требованием к элементарным объектам, т.е. к импликативным формулам, будет требование их *независимости* друг от друга (см. выше раздел 2.3). Легко показать, что формула I не является независимой в приведенном выше исходном множестве объектов, поскольку она доказуема из C , K или W , K . Например,

Утверждение 2. $W, K \vdash I$.

1. W .

2. K .

$$1 \ q/p * 2 \ q/p - 3,$$

$$3. \ p \rightarrow p.$$

Очевидно, что формулу K нужно как-то ослабить, например, подстановкой в нее других переменных (или их отождествлением). Этим способом можно получить формулу K_1 :

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$$

($p/p \rightarrow q$ и q/r в K).

Теорема 1. *Множество формул I, B, C, W, K_1 является независимой аксиоматизацией H_{\rightarrow} .*

Доказательство теоремы состоит из двух частей:

(i) доказательство независимости формул I, B, C, W, K_1 ;

(ii) доказательство того, что I, B, C, W, K_1 есть аксиоматизация H_{\rightarrow} .

(i). Доказательство независимости производится матричным методом, причем используемые матрицы должны быть *нормальными* в смысле Лукасевича–Тарского (см. выше раздел 4.2), т.е. они должны быть согласованы с правилом МР.

Матрица 1 [Sobociński 1952]:

→	0	1	2		
0	2	2	2		
1	0	0	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	0	2	B, C, W, K₁	I (p есть 1)

Матрица 2 [Anderson and Belnap 1975: 85]:

→	0	1	2		
0	2	2	2		
1	2	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	2	2	I, C, W, K₁	B (p есть 2, q есть 1, r есть 0)

Матрица 3 [Sobociński 1952]:

→	0	1	2		
0	2	2	2		
1	0	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	0	2	I, B, W, K₁	C (p есть 2, q есть 1, r есть 1)

Матрица 4 [Łukasiewicz 1920]:

→	0	1	2		
0	2	2	2		
1	1	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	1	2	I, B, C, K₁	W (p есть 1, q есть 0)

Матрица 5. [Sobociński 1952]:

→	0	1	2		
0	2	2	2		
*1	0	1	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	0	2	I, B, C, W	K₁ (p есть 0, q есть 0, r есть 1)

Интересно заметить, что хотя логика \mathbf{H}_\rightarrow является бесконечнозначной [Thomas 1962a], тем не менее независимость ее аксиом доказывается средствами трехзначной логики.

(ii). Надо показать, что $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}_1 \vdash \mathbf{K}$. Доказательством является

Утверждение 3. $I, C, K_1 \vdash K$ [Смирнов 1972: 61].

1. I .

2. C .

3. K_1 .

3 $q/p, r/q * 1 - 4$,

4. $q \rightarrow (p \rightarrow p)$.

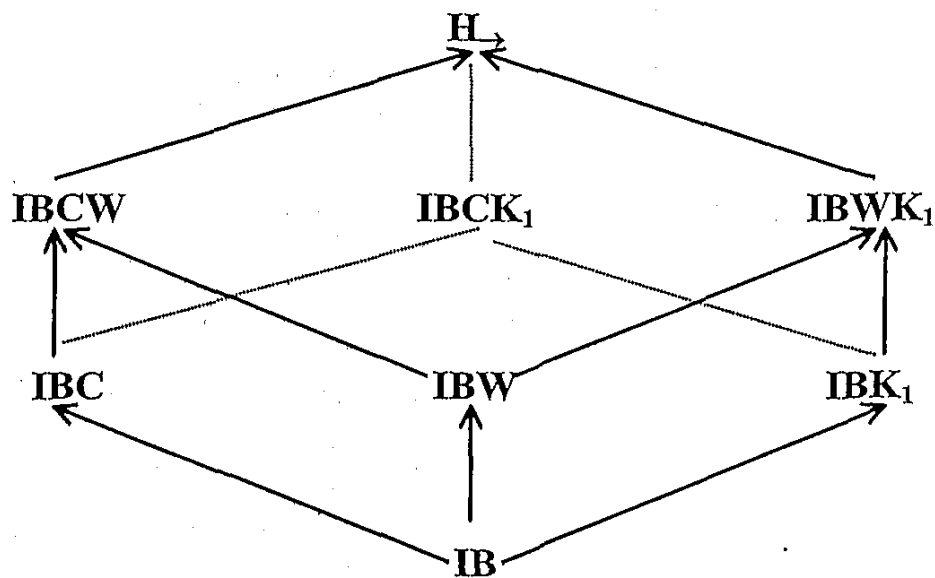
2 $p/q, q/p, r/p * 4 - 5$,

5. $p \rightarrow (q \rightarrow p) (= K)$.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Теперь, в силу доказательства независимости элементов множества $\{I, B, C, W, K_1\}$, мы можем перейти к построению того, что будем называть *логической конструкцией*. Рассмотрим семейство всех подмножеств этого множества. Как известно, семейство всех подмножеств некоторого конечного множества образует булеву решетку, упорядоченную отношением включения. В нашем случае булева решетка имеет $32 (=2^5)$ элементов с единицей H_{\rightarrow} . Остальные вершины решетки представляют собой подлогики H_{\rightarrow} . Полученную конечную булеву решетку обозначим посредством $L(H_{\rightarrow})$ и назовем H_{\rightarrow} -конструкцией.

Для простоты изображения в качестве нуля решетки возьмем логику IB^3 . В результате имеем следующую 8-элементную решетку импликативных логик:



³ Заметим, что для IB обобщенная теорема дедукции доказана в [Curry 1954].

Система **IBCW** есть слабая импликация Чёрча R_{\rightarrow} [Church 1951]. В силу Утверждений 2 и 3 и того, что K_1 есть подстановочный случай **K**, $IBCK_1 \equiv BCK$. Как сообщает А. Прайор [Prior 1962: 316], система **IBC** (под названием **BCI**) и **BCK** были введены К.А. Мередитом в 1956 г. Более подробно об элементах решетки $L(H_{\rightarrow})$ и вообще об импликативных логиках см. в [Карпенко 1993с].

Заметим, что, по-видимому, первая попытка (и не совсем успешная) решеточно упорядочить импликативные логики принадлежит [More 1964].

Обратим внимание на то, что на данной диаграмме изображена булева решетка *подмножеств аксиом* относительно включения, но в общем случае не решетка импликативных логик относительно выводимости из аксиом. Например, логика **IBC** не является пересечением множеств теорем, выводимых в **IBCW** и **IBCK₁**, поскольку $IK_1 \vdash W^*$:

1. **I**.

2. **K₁**.

2 $q/p, r/p \rightarrow (p \rightarrow p) * 1 - 3,$

3. $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p) (=W^*)$.

Но W^* является подстановочным случаем аксиомы **W** из **IBCW**. Однако W^* не выводима из **IBC**. Последнее следует из свойств матрицы 6:

\rightarrow	0	1		
0	1	0	верифицирует	фальсифицирует
1	0	1	I, B, C,	W^* (p есть 1).

3. Решетка импликативных логик $L(TV_{\rightarrow})$: классические версии **BCI**, **BCK** и R_{\rightarrow}

Теперь мы можем уточнить, что мы понимаем под *подходящим* расширением H_{\rightarrow} до TV_{\rightarrow} : *существует ли независимая аксиоматизация TV_{\rightarrow} формулами **I**, **B**, **C**, **W**, **K₁** и **X**?* [Карпенко 1992].

В силу теоремы Тарского–Бернайса (см. [Łukasiewicz and Tarski 1930, Theorem 29]) импликативный фрагмент TV_{\rightarrow} классической пропозициональной логики аксиоматизируем посредством формул **B'**, **K** и **P** с правилами **MP** и подстановкой, где

B'. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ (сильная транзитивность),

P. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ (закон Пирса).

Как уже отмечалось, обычно TV_{\rightarrow} получают за счет добавления к H_{\rightarrow} формулы **P**, но закон Пирса в качестве кандидата на место формулы **X** явно не пригоден, поскольку **I, B, C + P** уже является аксиоматизацией TV_{\rightarrow} , т.е. **I, B, C, P \vdash W, K₁** и, значит, множество формул **I, B, C, W, K₁, P** не является независимой аксиоматизацией TV_{\rightarrow} . Покажем, что **I, B, C, P \vdash B', K**.

Утверждение 4. B, C \vdash B'.

1. **B.**
2. **C.**
- 2 $p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow q, r/p \rightarrow r * 1 - 3,$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) (=B').$

Утверждение 5. I, B, C, P \vdash K. (см. [Wajsberg 1937], [Prior 1962], [Tanaka 1967]).

1. **I.**
2. **B.**
3. **C.**
4. **P.**
5. **I, C \vdash I' (Утверждение 1).**
6. **B, C, \vdash B' (Утверждение 4).**
- 6 $p/p \rightarrow q, q/(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r), r/s * 6 - 7,$
7. $((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow s \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow s).$
- 7 $q/q \rightarrow r, r/s \rightarrow r, s/(s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r)) *$
- 7 $p/s, s/p \rightarrow (s \rightarrow r) - 8,$
8. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((s \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (s \rightarrow r))).$
- 7 $s/((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s) * 6 p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow r, r/s - 9,$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow (((p \rightarrow r) \rightarrow s) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow s)).$
- 9 $p/p \rightarrow q, r/p, s/p * 10,$
10. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (P \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)).$
- 3 $p/(p \rightarrow q) \rightarrow q, q/P, r/(q \rightarrow p) \rightarrow p * 10 - 4 - 11,$
11. $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p) (=D).$
- 6 $q/(p \rightarrow q) \rightarrow q, r/(q \rightarrow p) \rightarrow p * 5 - 11 - 12,$
12. $p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p).$

$$8 \ q/(q \rightarrow p) \rightarrow p, r/p, s/q * 12 \ q/q \rightarrow p - 5 \ p/q, q/p - 13,$$

$$13. \ p \rightarrow (q \rightarrow p) (= K).$$

Отсюда, в силу теоремы Тарского–Бернайса, **I, В, С, Р** есть TV_{\rightarrow}^4 .

Таким образом, решение проблемы надо искать посредством ослабления формулы **P**. При этом **X** должна быть достаточно «сильной», чтобы формулы **I, В, С, W, K₁, X** аксиоматизировали TV_{\rightarrow} , и достаточно «слабой», чтобы все формулы **I, В, С, W, K₁, X** были независимы.

В ноябре 1992 г. автором была найдена подходящая формула **X₁**:

$$((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow (W_1 \rightarrow P_1),$$

где $((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)))$ есть подстановочный случай формулы **K₁**: $r/r \rightarrow r$; **W₁** есть подстановочный случай формулы **W**: $p/p \rightarrow q, q/r$; **P₁** есть подстановочный случай формулы **P**: $p/p \rightarrow q, q/r$.

Теорема 2. Множество формул **I, В, С, W, K₁, X₁** является независимой аксиоматизацией TV_{\rightarrow} (см. [Карпенко 1993с; 1997а]).

Заметим, что здесь при доказательстве независимости **I, В, С, W, K₁** используются те же самые матрицы, что и в Теореме 1. Для доказательства независимости аксиомы **X₁** нужна

Матрица 6 (трехзначная импликация Гейтинга):

\rightarrow	0	1	2	
0	2	2	2	
1	0	2	2	верифицирует
*2	0	1	2	I, В, С, W, K₁ X₁ (p есть 2, q есть 1, r есть 0).

Итак, поставленная нами выше проблема расширения H_{\rightarrow} до TV_{\rightarrow} решена. Правда, формула **X₁** содержит 21 переменную и 5 ее подформул являются тавтологиями классической пропозициональной логики TV , т.е. аксиома **X₁** является *неорганической* в смысле Вайсберга и Лесневского (см. [Чёрч 1960: 132]). Поэтому желательно было бы упростить формулу **X₁**.

Заметим, что вся формула $(W_1 \rightarrow P_1)$ есть подстановочный случай формулы

⁴ Как показал А. Прайор [Prior 1958], уже **В, С, Р** есть TV_{\rightarrow} .

$$((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)^5,$$

которую мы обозначили посредством **D** (см. Утверждение 5, формула 11). В итоге, формула X_2 выглядит следующим образом:

$$(p \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \rightarrow p)).$$

Теорема 3. Множество формул I, B, C, W, K_1, X_2 является независимой аксиоматизацией TV_{\rightarrow} [Карпенко 1993с].

(i). Проблемы возникают с доказательством независимости аксиомы **B**. В указанных работах при доказательстве этого случая использована метатеорема С. Яськовского [Jaskowski 1948b]. Из ее доказательства следует, что имеется шестиэлементная матрица, которая фальсифицирует аксиому **B**. Однако в [Ulrich 1994] была найдена подходящая четырехэлементная

Матрица 7:

\rightarrow	0	1	2	3		
0	3	3	3	3		
1	3	3	2	3		
2	3	1	3	3	верифицирует	фальсифицирует
*3	0	1	2	3	I, C, W, K_1, X_2	B (p есть 2, q есть 0, r есть 1).

(ii). I, B, C, W, K_1, X_2 есть TV_{\rightarrow} :

Утверждение 7. $I, C, W, K_1, X_2 \vdash P$.

1. **I**.
2. **C**.
3. **W**.
4. K_1 .
5. X_2 .
6. $I, C, K_1 \vdash K$ (Утверждение 3).

$$5 \ q/p \rightarrow q \ * \ 6 \ q/(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) - 3 - 7,$$

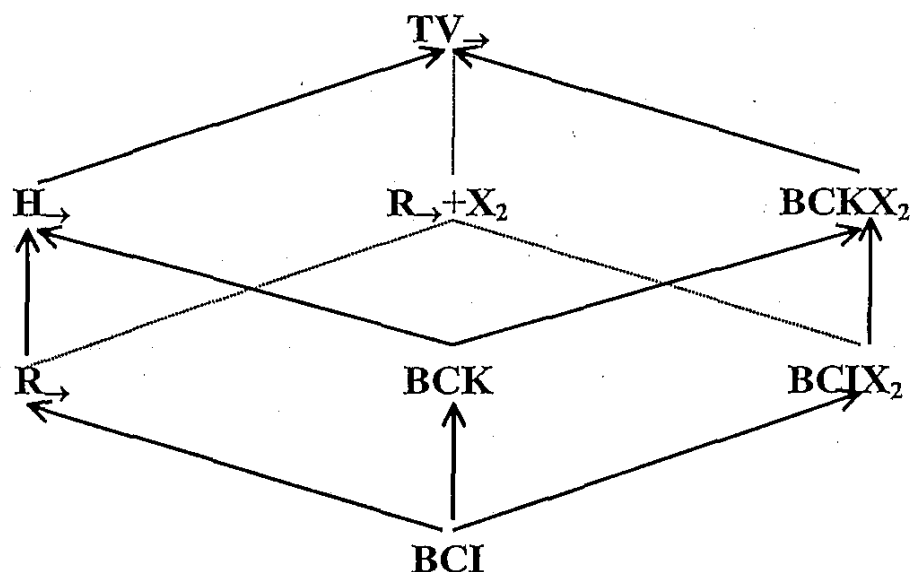
$$7. ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p (= P).$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Формула X_2 тоже является неорганической (три ее подформулы есть тавтологии TV), но она состоит из вхождений только двух различных переменных, число их вхождений 10 и к тому же тривиально доказывается пункт (ii).

⁵ Данная формула является одной из аксиом в аксиоматизации бесконечнозначной логики Лукасевича L_{∞} (см. выше раздел 8.1).

Теперь построим решетку $L(TV_{\rightarrow})$ подлогик множества $\{I, B, C, W, K_1, X_2\}$. Для простоты изображения в качестве нуля решетки возьмем логику **BCI**:



Импликативные логики, указанные на вершинах этой решетки, хорошо известны и описаны в современной литературе (кроме **BCI** X_2 и $R_{\rightarrow} + X_2$). Особый интерес представляет логика **BCK** X_2 .

Утверждение 8. $IBCK_1X_2 \equiv BCKD$.

Доказательство очевидно.

Логика **BCKD** является фрагментом бесконечнозначной логики Лукасевича L_{∞} и впервые изучались в [Rose and Rosser 1958]. В [Dyrda 1985] эта логика получила название “коммутативная **BCK**-логика” и рассмотрены ее расширения.

Заметим, что

$$BCKD \equiv BCID \equiv B'KD \equiv BKD.$$

Логика **B'KD** примечательна тем, что добавление к ней закона линейности

$$L. ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

дает импликативный фрагмент $L_{\infty \rightarrow}$ логики L_{∞} (см. [Rose 1956] (в другой формулировке) и [Meyer 1966])⁶.

⁶ В [Wozniakowska 1978] дается другая аксиоматизация $L_{\infty \rightarrow}$ как результат отдельности: **K**, **D** и

$$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (q \rightarrow r)).$$

Обратим внимание на следующий весьма важный факт. Хотя формулы X_1 и X_2 эквивалентны при наличии I, B, C, W, K_1 , но конструкции получаются разные, поскольку они содержат разные подлогики. Например, имеет место

Утверждение 9. $ВСКХ_1 \neq ВСКХ_2$.

Для доказательства используется

Матрица 8:

\rightarrow	0	1	2	3		
0	3	3	3	3		
1	2	3	3	3		
2	2	2	3	3	верифицирует	фальсифицирует
*3	0	1	2	3	I, B, C, K_1, X_1	X_2 (p есть 1, q есть 0).

Очевидно, что X_1 доказуема в $ВСКХ_2$.

4. Максимальная решетка $L(TV_{\rightarrow})$: логики RM_{\rightarrow} и $E_{\infty \rightarrow}$

В связи с тем, что имеются разные TV_{\rightarrow} -конструкции, возникает естественный вопрос о классе формул X_i . В [Slaney and Bunder 1994: 62] ставятся следующие две конкретные проблемы:

(1) Существует ли бесконечное число различных систем $ВСIX_i$, $ВСКХ_i$ и $ВСИWХ_i$?

(2) Имеются ли наиболее слабая и наиболее сильная системы $ВСIX_i$, $ВСКХ_i$ и $ВСИWХ_i$?

Постановка проблемы обязана тому, что указанные авторы в качестве кандидата на место формулы X предложили формулу

$$X_3. (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r)^7.$$

Ими, например, было показано, что

$$ВСКХ_2 \neq ВСКХ_3$$

и X_2 доказуема в $ВСКХ_3$.

Поскольку доказать независимость аксиомы I от B, C, W, K_1 , X_3 не удавалось⁸, то X_3 была заменена на

⁷ Эта формула под названием U появляется у нас в разделе 8.5.3.1 и является одной из аксиом в аксиоматизации импликативного фрагмента RM_{\rightarrow} логики RM .

$$X_4. (p \rightarrow p) \rightarrow X_3.$$

Теорема 4. Множество формул I, B, C, W, K_1, X_4 является независимой аксиоматизацией TV_{\rightarrow} .

(i). Независимость доказывается теми же самыми матрицами, что и для множества аксиом I, B, C, W, K_1, X_1 (Теорема 2).

(ii). I, B, C, W, K_1, X_4 есть TV_{\rightarrow} :

Утверждение 10. $I, B, C, W, K_1, X_4 \vdash P$.

1. $(p \rightarrow p) (= I)$.
2. $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) (= B)$.
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) (= C)$.
4. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) (= W)$.
5. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q)) (= K_1)$.
6. $(p \rightarrow p) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r) (= X_4)$.
- 6 * 1 – 7,
7. $(((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow (((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r) (= X_3)$.
- 5 $q/p, r/q \rightarrow p$ * 1 – 8,
8. $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p)$.
- 3 $p/q \rightarrow p, q/p, r/p$ * 8 – 9,
9. $p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$.
- 2 $q/p, r/(q \rightarrow p) \rightarrow p, p/(p \rightarrow q) \rightarrow q$ * 9 – 10,
10. $((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow D$.
- 3 $p/q \rightarrow r, q/p \rightarrow q, r/p \rightarrow r$ * 2 – 11,
11. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) (= B')$.
- 11 $q/(q \rightarrow p) \rightarrow p, r/q$ * 9 – 12,
12. $((((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$.
- 3 $p/q \rightarrow p, r/p$ * 1 $p/q \rightarrow p$ – 13,

⁸ Заметим, что только в [Комендантский 2001] с помощью прувера OTTER была доказана выводимость закона тождества I из B, C, W, K_1, X_3 .

$$13. q \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p).$$

$$2 \text{ r}/(q \rightarrow p) \rightarrow p, p/(p \rightarrow q) \rightarrow q * 13 - 14,$$

$$14. (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)).$$

$$2 \text{ q}/((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q, \text{ r}/\mathbf{D}, p/p \rightarrow q * 14 - 15,$$

$$15. ((p \rightarrow q) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \mathbf{D}).$$

$$15 * 13 \text{ q}/p \rightarrow q, p/q - 16,$$

$$16. (p \rightarrow q) \rightarrow \mathbf{D}.$$

$$2 \text{ q}/p \rightarrow q, \text{ r}/\mathbf{D}, p/((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q * 16 - 12 - 17,$$

$$17. (((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow \mathbf{D}.$$

$$7 \text{ r}/\mathbf{D} * 10 - 17 - 18,$$

$$18. ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p) (= \mathbf{D}).$$

$$18 \text{ q}/p \rightarrow q * 4 - 19,$$

$$19. ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p (= \mathbf{P})^9.$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Особый интерес представляют подлогики \mathbf{IBCWX}_4 и $\mathbf{IBCK}_1\mathbf{X}_4$.

Утверждение 11. \mathbf{IBCWX}_4 есть $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$.

Напомним (см. выше раздел 8.5.3.1), $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$ есть $\mathbf{B}', \mathbf{W}, \mathbf{I}', \mathbf{X}_3$ [Meyer and Parks 1972]. Матрица 5 с матрицей для инволюции \sim (отрицание Лукасевича) являются характеристическими для импликативно-негативного фрагмента \mathbf{RM} [Parks 1972]. Поскольку формула \mathbf{X}_4 общезначима здесь, то в силу отделимости импликации в $\mathbf{RM}_{\rightarrow, \sim}$ [Meyer and Parks 1972] формула \mathbf{X}_4 доказуема в $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$. Теперь надо показать, что формулы \mathbf{B}', \mathbf{I}' и \mathbf{X}_3 доказуемы в \mathbf{IBCWX}_4 . Первая и вторая формулы доказываются Утверждениями 4 и 1 соответственно. \mathbf{X}_3 получается из \mathbf{X}_4 по правилу \mathbf{MP} .

Утверждение 12. $\mathbf{IBCK}_1\mathbf{X}_4$ есть $\mathbf{L}_{\omega \rightarrow}$.

⁹ Доказано вместе с В.М. Поповым. Впервые Утверждение 10 (в виде $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{W}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_3 \vdash \mathbf{P}$) было доказано в [Slaney and Bunder 1994] с помощью компьютерной программы. В этой же работе отдельно доказывается Утверждение $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_3 \vdash \mathbf{D}$. Как и в первом случае, приведена только довольно-таки непростая схема доказательства. Заметим, что в нашем доказательстве сначала доказывается $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_3 \vdash \mathbf{D}$, а затем за один шаг из \mathbf{D} и \mathbf{W} получаем \mathbf{P} .

Поскольку $\mathbf{IBCK}_1\mathbf{X}_4$ есть \mathbf{BCKX}_3 , а $\mathbf{L}_{\infty\rightarrow}$ есть $\mathbf{B'KDL}$ (см. выше), то в [Карпенко и Попов 1997]¹⁰ доказано, что

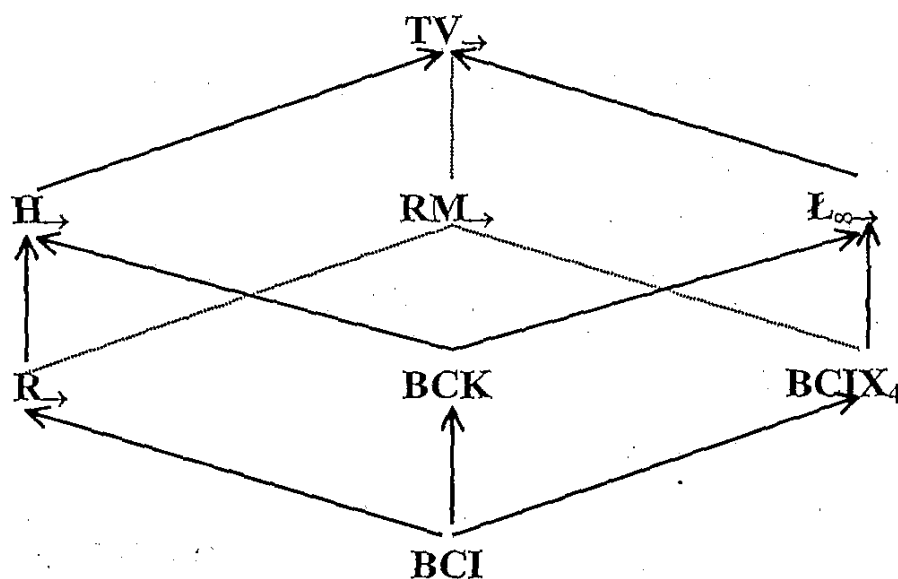
\mathbf{BCKX}_3 есть $\mathbf{B'KDL}$, т.е.

(a) $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{X}_3 \vdash \mathbf{B'}, \mathbf{D}, \mathbf{L}$ и

(b) $\mathbf{B'}, \mathbf{K}, \mathbf{D}, \mathbf{L} \vdash \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X}_3$.

Таким образом, найдена новая аксиоматизация $\mathbf{L}_{\infty\rightarrow}$.¹¹

Теперь представим решетку $L(\mathbf{TV}_{\rightarrow})$ с аксиомой \mathbf{X}_4 :



Все логики, указанные на вершинах этой решетки (кроме \mathbf{BCIX}_4), являются импликативными логиками, лежащими в основе наиболее фундаментальных логических систем. Из результата А. Аврона [Avron 1984] следует, что $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ является *единственным* собственным расширением $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$. Отсюда следует ответ на вопрос (2) Дж. Слэни и М. Бундера (см. выше) относительно наиболее сильной системы $\mathbf{BCIW}\mathbf{X}_i$. Таковой как раз и является система $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$. В силу этого, приведенная решетка была названа *максимальной* [Карпенко 1998]. Обратим внимание на то, что если между $\mathbf{RM}_{\rightarrow}$ и $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ нет промежуточных импликативных логик, то между $\mathbf{L}_{\infty\rightarrow}$ и $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ их счетное множество [Komori 1978], а между \mathbf{H}_{\rightarrow} и $\mathbf{TV}_{\rightarrow}$ их континуум [Верхозина 1986].

¹⁰ См. также [Karpenko and Popov 1997].

¹¹ В [Карпенко 2000: 277-278] с помощью компьютерной программы MaGIC (см. [Slaney and Meglicki 1991]) была доказана также независимость аксиом $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ и \mathbf{X}_3 .

Имеется также частичный положительный ответ и на первый вопрос. Для этого введем следующие определения. Следуя [Pahi 1971; 1972a], пусть α и β обозначают произвольные правильно построенные формулы. α называется переменнo-подобной (*variable-like*), если и только если никакая пропозициональная переменная не входит в α больше одного раза. Если β есть результат подстановки в формулу α ($p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \dots, p_k/\beta_k$), такой, что каждая β_i является переменнo-подобной и для $i \neq j$, β_i и β_j не имеют общих пропозициональных переменных ($1 \leq i \leq k$), тогда формула β называется *ограниченным подстановочным случаем* (o.n.c.) формулы α . Например, формула K_1 есть o.n.c. формулы K . Из [Pahi 1971] (см. также [Pahi 1972]) следует, что если α^* есть любая импликативная формула, которая является o.n.c. α , тогда $R_{\rightarrow} + \alpha$ и $R_{\rightarrow} + \alpha^*$ определяют эквивалентные системы. А это значит, что любое ослабление, которое есть o.n.c. формул $X_1 - X_4$, опять же есть искомая формула X . Рассмотрим для примера формулу $X_{2_1}^*$:

$$\begin{aligned} & ((p \rightarrow q) \rightarrow ((r \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow \\ & (((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)), \end{aligned}$$

которая есть o.n.c. формулы X_2 : $p/p \rightarrow q, q/r$. Используя Теорему 1, можно показать, что $I, B, C, W, K_1, X_{2_1}^*$ есть TV_{\rightarrow} . В итоге мы имеем, например, бесконечное число новых импликативных логик $BSIX_{2_1}^*$.

Обратим внимание на статью [Ernst 2002], где предложено девять формул, выполняющих роль нашего X , например, под номером 5 выступает формула

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (((((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q).$$

Установлены некоторые взаимоотношения между этими формулами. Также показано (с помощью компьютерной программы), что $I, B, C, X_3 \vdash X_2$.

5. Решетка импликативных логик $L(TV_{\rightarrow})$: логики E_{\rightarrow} , $S4_{\rightarrow}$ и $S5_{\rightarrow}$

А как быть с импликацией в логике следования E и с импликацией в льюисовских модальных логиках $S4$ и $S5$?

Рассмотрим следующие импликативные формулы:

$$A. ((p \rightarrow p) \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$B'. (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

$$W. (p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

$$K_1. (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \rightarrow q))$$

$$X_2. (p \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow p)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p))$$

$$C*. p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p).$$

Правила вывода: МР и подстановка.

Формулы A , B' , W представляют собой импликативный фрагмент E_{\rightarrow} логики следования E (см. [Anderson and Belnap 1975: 77])¹². Здесь же показано, что $A \vdash I$. В [Mendez 1988: 21] показано, что A , B' , W , K_1 есть импликативный фрагмент $S4_{\rightarrow}$ модальной логики $S4$. Наконец, A , B' , W , K_1 , X_2 есть импликативный фрагмент $S5_{\rightarrow}$ модальной логики $S5$. Обычно $S5_{\rightarrow}$ аксиоматизируется как $S4_{\rightarrow} + P_1$, где P_1 есть ослабленный закон Пирса:

$$(((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)^{13}.$$

Покажем, что $S4_{\rightarrow} + X_2 = S4_{\rightarrow} + P_1$.

В [Ulrich 1990] предложена следующая характеристическая матрица для $S5_{\rightarrow}$. Множеством значений является множество натуральных чисел: 1, 2, 3, ... с 0. Единственным выделенным значением является 1. Импликация $x \rightarrow y$ в $S5_{\rightarrow}$ определяется так: $x \rightarrow y = 1$, если x есть кратное y , и $x \rightarrow y = 0$ в остальных случаях. Нетрудно вычислить, что X_2 общезначима в этой матрице, т.е. X_2 есть теорема $S5_{\rightarrow}$. Остается показать, что из $S4_{\rightarrow} + X$ выводима формула P_1 :

1. W .

2. K_1 .

3. X_2 .

¹² С логикой E_{\rightarrow} мы уже встречались в разделе 8.5.1 (сноска 25).

¹³ Специально вопросу аксиоматизации импликативных фрагментов модальных льюисовских систем посвящена статья [Hacking 1963]. См. также [Minic 1974, §11].

$$3 \ p/p \rightarrow q, q/(p \rightarrow q) \rightarrow r * 2 \ r/((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r) -$$

$$1 \ p/p \rightarrow q, q/(p \rightarrow q) \rightarrow r - 4,$$

$$4. (((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q) (= P_1).$$

В [Anderson and Belnap 1962: 46] установлено, что логики R_{\rightarrow} , H_{\rightarrow} и TV_{\rightarrow} получаются из E_{\rightarrow} , $S4_{\rightarrow}$ и $S5_{\rightarrow}$ соответственно за счет добавления к последним формулы C^* .

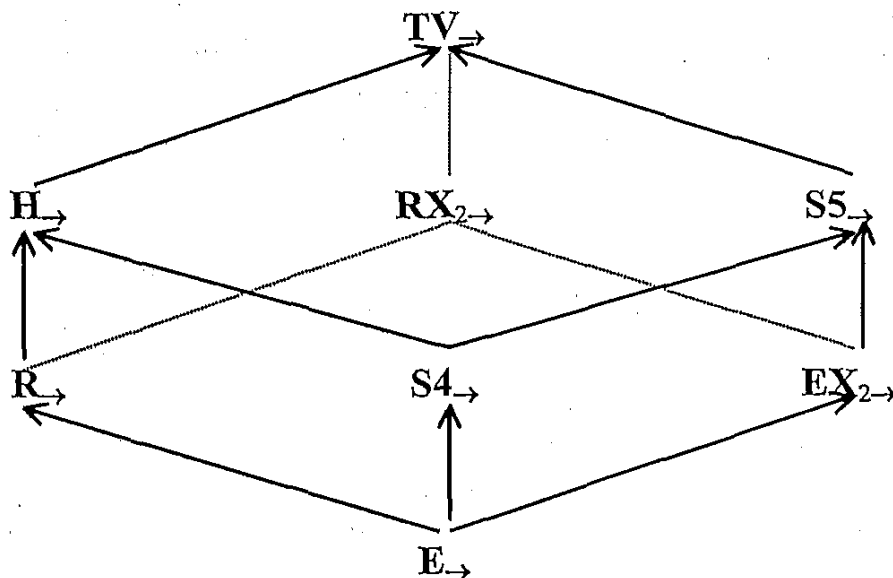
Теорема 5. Множество формул A, B', W, K_1, X_2, C^* является независимой аксиоматизацией TV_{\rightarrow} .

(i). Для доказательства независимости A используется матрица 1; для B' матрица 7; для W матрица 4; для K_1 матрица 5; для X_2 матрица 6; для C^* матрица 3.

(ii) A, B', W, K_1, X_2, C^* есть TV_{\rightarrow} (см. выше).

Заметим, что формула X_3 в матрице Ульрича не имеет места: p есть 2, q есть 3, r есть 0.

В результате имеем следующую булеву решетку импликативных логик [Карпенко 1999], если в качестве нуля возьмем логику E_{\rightarrow} .¹⁴



6. Некоторые полные пропозициональные логики

Теперь рассмотрим конструкцию для классической пропозициональной логики TV .

¹⁴ Интересно, что [Kashima and Kamide 1999] введен класс импликативных логик в генценовской формулировке, расширяющий E_{\rightarrow} до H_{\rightarrow} .

Из работы Вайсберга [Wajsberg 1937, §5] следует, что добавление формулы $0 \rightarrow p$ (где 0 является константой, интерпретируемой как ложь) к произвольной TV_{\rightarrow} дает TV , где отрицание \neg определяется стандартным образом: $\neg p =: p \rightarrow 0$.

Обозначим формулу $0 \rightarrow p$ посредством N .

Теорема 6. Множество формул I, B, C, W, K, X_4, N является независимой аксиоматизацией TV .

(i). Используются все матрицы из теоремы 4 и

Матрица 9

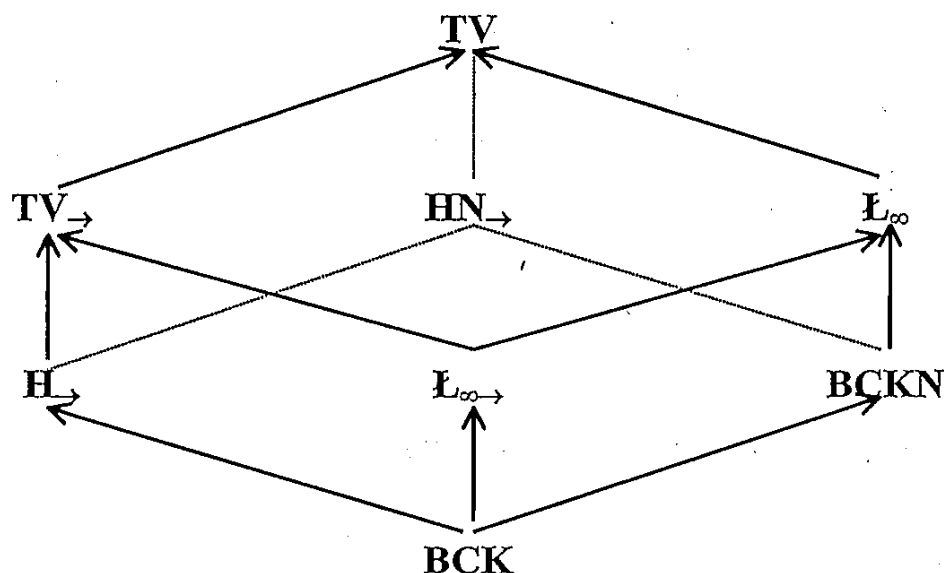
\rightarrow	0	1	2		
0	2	1	2		
1	0	2	2	верифицирует	фальсифицирует
*2	0	1	2	$I, B, C, W, K, X_4,$	N (p есть 1).

(ii). I, B, C, W, K, X_4, N есть TV [Wajsberg 1937] (см. также [Turquette 1966]).

Таким образом, Теорема 6 доказана.

Обратим внимание, что B', K, D, N есть аксиоматизация L_{∞} [Turquette 1963]. Отсюда $BCKX_2N, BCKX_3N$ и $BCKX_4N$ есть L_{∞} .

Теперь мы можем построить решетку $L(TV)$, где в качестве нуля решетки возьмем логику BCK :



Из этой конструкции видно, что бесконечнозначная логика Лукасевича L_{∞} имеет фундаментальное значение после классической логики TV .

Напомним, что логики TV и L_∞ имеют хорошо известные решеточные структуры: булеву решетку и решетку де Моргана соответственно. Это является следствием того, что в импликативных фрагментах указанных логик имеет место

$$p \vee q =: (p \rightarrow q) \rightarrow q.$$

Как показано в [Torrens 1988], это только те логики, которые содержат аксиомы **B**, **C**, **K**, **D**. Поэтому возникает вопрос, как получить другие *полные* (full) логические системы, т.е. с логическими связками \neg , \rightarrow , \vee , \wedge ? Этот вопрос имеет смысл, так как в отличие от TV и L_∞ , например, в интуиционистской логике **H**, посредством \neg и \rightarrow нельзя определить \vee и \wedge .

Поскольку в наших конструкциях появились полные логики, то определенные решеточные структуры можно добавлять к полученным импликативным (импликативно-негативным) логикам. Например, добавление к H_\rightarrow только решеточной структуры уже делает решетку дистрибутивной [Rasiowa 1974a], а вместе с отрицанием $\neg p (= p \rightarrow 0)$ мы получаем полную интуиционистскую пропозициональную логику. Правда, это выглядит несколько искусственно и ниже мы увидим, как эта проблема решается за счет структурных правил.

7. Несколько замечаний о классификации логик

Подводя итог, можно сказать, что рассмотренные конструкции в виде решеток пропозициональных логик хорошо показывают взаимоотношения между различными логиками и то, какое место они занимают по отношению к классической двузначной логике TV .

Теперь выделим два основных принципа порождения импликативных логик и целых их классов:

1. В каждом случае нахождение *нового* X_i определяет различные подлогики из множества $\{I, B, C, W, K_1, X_i\}$;
2. Ограниченная подстановка порождает целые классы подлогик в TV_\rightarrow -конструкциях.

Тогда классификация импликативных логик в нашем понимании предстает в виде построения различных булевых решеток, с помощью которых можно порождать новые импликативные логики.

Но, конечно, встает вопрос вообще о классификации логик. Здесь стоит согласиться с О. М. Аншаковым и С. В. Рычковым [Аншаков и Рычков 1984b: 78], «что создание жесткой законченной всеобъемлющей классификации неклассических логик представляется задачей невыполнимой». Это уже следует из наличия контину-

альных классов самих логик. Поэтому классификация логик проводится относительно каких-либо «хороших» свойств, например, в классе всех суперинтуиционистских логик (см. выше раздел 8.2.3) выделяются класс конечно аксиоматизируемых логик, финитно аппроксимируемых, с дизъюнктивным свойством и т.д. (см. [Кузнецов 1975]).

В последнее время исключительное развитие получили *подструктурные логики*. Это такие логики, секвенциальная формулировка которых получается из генценовских исчислений **LK** (классической логики) и **LJ** (интуиционистской логики) за счет элиминации и/или ограничения различных структурных правил: утончения, сокращения и перестановки. Одной из первых работ в этой области является книга [Смирнов 1972]. В [Опо 1990] строится иерархия таких логик в виде куба, где в качестве исходного исчисления берется полное исчисление Ламбека **FL** (грубо говоря, это **LJ** без структурных правил). Интересной работой является [Battilotti and Sambin 1999], где вводится *базисная логика В*.¹⁵ Эта логика вообще не имеет структурных правил и может рассматриваться как «логика связок», из которой различные более богатые логики могут быть получены посредством добавления соответствующих структурных правил. В результате строится куб логик с наиболее сильной классической логикой. В этот куб также входят паранепротиворечивая квантовая логика, линейная логика Жирара, интуиционистская логика.

С другой стороны, алгебраическая логика является хорошим инструментом для выяснения такого сложного вопроса, как взаимоотношение между различными логическими системами и, главное, их классификация. Здесь в зависимости от свойств отношения конгруэнтности строится так называемая иерархия Лейбница [Font, Jansana and Pigozzi 2003: 49] (см. выше раздел 4.5). Отметим, что обобщение этой иерархии приводит к алгебраической классификации импликативных логик (см. [Cintula and Noguera 2010x]).

Что касается непосредственно многозначных логик, то первое, что напрашивается, — это классификация относительно их функциональных свойств. Классификация многозначных логик относительно свойств аксиоматизируемости, предложенная в [Аншаков и Рычков 1984b] (см. выше раздел 6.3), основывается именно на их функциональных свойствах:

¹⁵ Эта логика введена в 1995 г. Не путать с базисной логикой **BL**, введенной в [Hájek 1998] (см. выше раздел 9.4.3).

- логики сигнатуры δ ,
- расширение сигнатуры δ ,
- все остальные.

Но такая классификация очень упрощает мир многозначных логик. И поэтому мы опять обратим внимание на два удивительных частных случая классификации. Это построение в [Ермолаева и Мучник 1979] девятиэлементной решетки расширений четырехзначной классической логики (см. выше раздел 5.4.3) и построение в [Томова 2010] 7-элементной решетки базовых трехзначных логик¹⁶, представляющих собой импликативные расширения регулярных логик Клини. Три из этих базовых логик выявлены впервые (см. выше раздел 3.9). При этом, что самое поразительное, если в первом случае к восьмиэлементной булевой решетке добавляется один элемент, то во втором случае из восьмиэлементной булевой решетки убирается один элемент, хотя внешний куб остается.

Все эти построения, и в особенности различные решетки и кубы логик, можно прокомментировать так, что логика превращается в науку о конструкциях логик.

¹⁶ Напомним, что в [Финн, Аниаков, Григория и Забейсайло 1980] перечислен и классифицирован в виде дерева класс трехзначных логик *бессмысленностного типа*. Этот класс состоит из 10 логик (все с одним выделенным значением), соответствующие алгебры которых не слабее квази-решетки.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Аншаков О.М.

- [1980] О некоторой конструктивизации пропозициональной логики Д.А. Бочвара // Семиотика и информатика, 15: 61-73.
- [1983] О некоторых конструктивизациях пропозициональных логик Д.А.Бочвара и С.Холдена // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 335-359.
- [1998] J -логики и соответствующие им классы алгебр // Логические исследования, 5: 25-52.
- [2009 (ред.)] ДСМ-метод автоматического порождения гипотез. Логические и эпистемологические основания. М.: URSS.

Аншаков О.М. и Рычков С.В.

- [1982] О многозначных логических исчислениях // Семиотика и информатика, 19: 90-117.
- [1984a] Об аксиоматизации конечнозначных логических исчислений // Математический сборник, 123(165), № 4: 477-495.
- [1984b] Об одном способе формализации и классификации многозначных логик // Семиотика и информатика, 23: 78-106.

Аншаков О.М. и Финн В.К.

- [1981] Так называемые нечеткие логики и одноимпликационные исчисления // Семиотика и информатика, 17: 71-89.

Аристотель

- [1978] Об истолковании // Сочинения в 4-х т. Т. 2. М.: Мысль.

Батыршин И.З.

- [2001] Основные операции нечеткой логики и их обобщения. Казань: Отечество.

Бахтияров К.И.

- [2003] Алгебра логики для компьютеров // Смирновские чтения. 4 Международная конференция. М.: ИФРАН, 25-27.

Белнап Н.

- [1981a] Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н. и Стил Т. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 208-239.
- [1981b] Об одной полезной четырехзначной логике // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс, 240-267.

Биркгоф Г.

- [1984] Теория решеток. М.: Наука.

Блохина Г.Н.

- [1970] О предикатном описании классов Поста // Дискретный анализ, 16: 16-29.

- Бочвар Д. А.
[1938] Об одном трехзначном исчислении и его применении к анализу парадоксов классического расширенного функционального исчисления // Математический сборник, 4(2): 287-308. (Английский перевод в: History and Philosophy of Logic, 2: 87-112. 1981).
- Бочвар Д. А. и Финн В. К.
[1972] О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий. 1. // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М.: Наука, 238-295.
[1976] Некоторые дополнения к статьям о многозначных логиках // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 265-325.
- Брусенцов Н. П., Маслов С. П., Розин В. П. и Тишулина А. М.
[1965] Малая цифровая вычислительная машина «Сетунь». М.: МГУ.
- Ванзинг Г. и Шрамко Я. В.
[2005] Логика компьютерных сетей // Логические исследования, 12: 119-145.
- Василенко О. Н.
[1988] Современные способы проверки простоты чисел // Кибернетический сборник, 25: 162-188.
- Васильев Н. А.
[1989] Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука.
- Васюков В. Л. и Карпенко А. С.
[1987] Симметрический моноид Гейтинга: модель для бесконечнозначной логики Лукасевича // Неклассические логики и пропозициональные установки. (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М., 118-124.
- Верещагин Н. К. и Шень А.
[2008] Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. 3-е изд., дополн. М.: МЦНМО.
- Верхозина М. И.
[1986] Предтабличные импликационные логики // Алгебраические системы. Алгоритмические вопросы и ЭВМ. Иркутск, 19-30.
- Виноградов Д. В.
[2006a] Еще один вариант логики аргументации // Научно-техническая информация. Сер. 2, 5: 1-14.
[2006b] Метод аналитических таблиц для логики аргументации // Научно-техническая информация. Сер. 2, 11: 17-20.
- Владимиров Д. А.
[1969] Булевы алгебры. М.: Наука.

Войшвилло Е.К.

[1988] Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: МГУ.

[1989] Символическая логика (классическая и релевантная). М.: МГУ.

Волгин Л.И. и Левин В.И.

[1990] Непрерывная логика. Теория и применения. Таллин: Изд-во АН Эстонии.

Воленский Я.

[2004] Львовско-Варшавская философская школа. М.: РОССПЭН.

Вригт Г.Х., фон.

[1986a] Детерминизм и высказывания о будущих событиях // Вригт Г.Х., фон. Логико-философские исследования. Избранные труды. М.: Прогресс, 539-554.

[1986b] Логика истины // Вригт Г.Х., фон. Логико-философские исследования. Избранные труды. М.: Прогресс, 555-579.

Гаврилов Г.П.

[1965] О функциональной полноте в счетнозначной логике // Проблемы кибернетики, 15: 5-64.

Гаврилов Г.П. и Сапоженко А.А.

[1977] Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977.

Гейтинг А.

[1965] Интуиционизм. М.: Наука. Изд. 2. М.: URSS, 2010.

Генцен Г.

[1967] Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 9-74.

Гильберт Д. и Аккерман В.

[1947] Основы теоретической логики. М.: ИЛ. Изд. 2. М.: URSS, 2010.

Гильберт Д. и Бернайс П.

[1979] Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука.

Гиндикин С.Г.

[1972] Алгебра логики в задачах. М.: Наука. (Английский перевод: Gindikin S.G. Algebraic Logic. New York: Springer-Verlag, 1985).

Гливенко В.И.

[1998a] О логике Браура // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М.: ИФРАН, 15-18.

[1998b] О некоторых аспектах логики Брауэра // Там же, 19-23.

Голдблатт Р.

[1983] Топосы. Категорный анализ логики. М.: Мир.

Горбунов И.А. и Рыбаков М.Н.

- [2007] Континуальные семейства логик // Логические исследования, 14: 131-151.

Гретцер Г.

- [1982] Общая теория решеток. М.: Мир.

Григолия Р.Ш.

- [1973] Алгебраический анализ n -значных логических систем Лукасевича–Тарского // Труды Тбилисского гос. университета. А6-7 (149-150): 121-132.

- [1976] Решетка всех финитно-аппроксимируемых расширений счетнозначной логики Лукасевича // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 221-246.

- [1987] Свободные алгебры неклассических логик. Тбилиси: Медниереба.

Григолия Р.Ш. и Финн В.К.

- [1979] Алгебры Бочвара и соответствующие им пропозициональные исчисления // Исследования по неклассическим логикам и теория множеств. М.: Наука, 345-372.

Гришин В.Н.

- [1974] Об одной нестандартной логике и ее применении к теории множеств // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 135-171.

- [1976] Об алгебраической семантике логики без сокращений // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 247-264.

Гудстейн Р.Л.

- [1961] Математическая логика. М.: ИЛ. Изд. 2. М.: URSS, 2010.

Девяткин Л.Ю.

- [2004] Трехзначные изоморфы классической логики // Логические исследования, 11: 119-125.

- [2007] К вопросу о трехэлементных характеристических матрицах для классической логики высказываний // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФРАН. С. 43-49.

- [2009] N -значные матрицы для классической логики высказываний // Логические исследования, 15: 94-105.

Девяткин Л.Ю., Карпенко А.С. и Попов В.М.

- [2007] Трехзначные характеристические матрицы классической пропозициональной логики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФРАН, 50-62.

Дементович Я.

- [1975] О некоторых гомоморфизмах и отношениях для предельных логик // Проблемы кибернетики, 30: 5-42.

Донченко В.В.

- [1963] Некоторые вопросы, связанные с проблемой разрешения для исчисления строгой импликации Аккермана // Проблемы логики. М.: АН СССР, 18-24.

Драгалин А.Г.

- [1979] Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука. (Английский перевод: Dragalin A.G. Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory. American Mathematical Society, 1988).

Емельянов Н.Р.

- [1985] О сложности задачи выразимости в многозначных логиках // Доклады Академии Наук СССР, 282(3), 525-529.

Ермолаева Н.М.

- [1973] О логических исчислениях, родственных исчислению Хао Вана // Научно-техническая информация, сер. 2.

Ермолаева Н.М. и Мучник А.А.

- [1974] Модальные расширения логических исчислений типа Хао Вана // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 172-193.
- [1976] Модальные логики, определяемые эндоморфизмами дистрибутивных решеток // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 229-246.
- [1979] Функционально замкнутые 4-значные расширения булевой алгебры и соответствующие логики // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М.: Наука, 298-315.

Жегалкин И.И.

- [1927] О технике вычислений предложений в символической логике // Математический сборник, 34: 9-28.

Заде Л.

- [1974] Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. М.: Знание, 5-49.
- [1976] Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных рассуждений. М.: Мир.
- [2001] Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных и интеллектуальных систем // Новости искусственного интеллекта, 2-3: 7-11.

Зайцев Д.В. и Шрамко Я.В.

- [2004] Логическое следование и выделенные значения // Логические исследования, 11: 126-137.

Захарова Е.Ю., Кудрявцев В.Б. и Яблонский С.В.

- [1969] О предполных классах в k -значных логиках // Доклады Академии Наук СССР, 186: 509-512.

Зиновьев А.А.

- [1959] Проблема значений истинности в многозначной логике // Вопросы философии, 3: 131-136.
[1960] Философские проблемы многозначной логики. М.: АН СССР, 29-32. (Английский перевод: Zinoviev A.A. Philosophical Problems of Many-valued Logic. Dordrecht: Reidel, 1963).
[1964] Многозначная логика // Философская энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. Энциклопедия, 472-474.
[1968] Очерк многозначной логики // Проблемы логики и теории познания. М.: МГУ. С. 113-204. (Переиздано в: Зиновьев А.А. Очерки комплексной логики. М.: URSS, 2000, 93-177).

Знаменская Н.А. и Попов В.М.

- [2009] Паранормальная логика $PContPComp$ как пересечение паранепротиворечивой логики $PCont$ и параполной $Pcomp$ // Шестые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции, 17 – 19 июня 2009 г., Москва. М.: Современные тетради, 63-65.

Ивин А.А.

- [1980] Парадоксы модальной логики Я. Лукасевича // Философские науки, 1: 75-83.

Ивлев Ю.А.

- [1992] Квазифункциональная логика // НТИ, сер. 2. Информационные процессы и системы, 6.
[2002] Основные области приложения квазиматричной логики // Логические исследования, 9: 103-112.

Ишмуратов А.Т.

- [1974] Аксиоматизация трехзначного исчисления высказываний Бочвара // Теория логического вывода. Ч. II. М.: ИФРАН, 214-218.
[1981] Логические теории временных контекстов. Киев: Наукова Думка.

Ишмуратов А.Т., Карпенко А.С. и Попов В.М.

- [1989] О паранепротиворечивой логике // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М.: Наука, 261-284.

Карпенко А.С.

- [1982] Характеристическая матрица для простых чисел // Шестая Всесоюзная конференция по математической логике: Тезисы докладов. Тбилиси. С. 76.
[1985] Фактор-семантика для бесконечнозначной логики Лукасевича // Неклассические логики. (Труды научно-

- исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М.: ИФРАН, 20-26.
- [1986] Некоторые алгебры в качестве истинностных значений // Нестандартные семантики неклассических логик (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М. ИФРАН, 6-13.
 - [1989a] Конечнзначные логики Лукасевича: Алгебро-логические свойства простых чисел // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М.: Наука, 170-205.
 - [1989b] От фактор-семантики к логическому исчислению алгебр // Там же, 93-100.
 - [1989c] Истинностные значения. Что это такое? // Исследования по неклассическим логикам. М.: Наука, 38-53.
 - [1990] Фатализм и случайность будущего: логический анализ. М.: Наука (М.: ЛКИ/URSS, 2007, изд. 2-е).
 - [1992] Проблема о расширении H_{\rightarrow} // Одиннадцатая меж-республиканская конференция по математической логике. Казань. С. 69.
 - [1993a] Матричная логика без неподвижных точек // Логические исследования, 1: 181-185.
 - [1993b] Ян Лукасевич – детерминизм и логика // Логические исследования, 2: 206-223.
 - [1993c] Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования, 2: 224-258.
 - [1995] Логика, детерминизм и феномен прошлого (к публикации статьи Яна Лукасевича «О детерминизме») // Вопросы философии, 5: 72-81.
 - [1997] Многозначные логики. Серия «Логика и компьютер». Вып. 4. М.: Наука.
 - [1997a] Классификация пропозициональных логик // Логические исследования, 4: 107-133.
 - [1999] Импликации следования, строгая, релевантная, интуиционистская и классическая и их взаимоотношения, 6: 76-80.
 - [2000] Логика Лукасевича и простые числа. М.: Наука. (М.: URSS/ЛКИ, 2009, изд. 3-е, испр.).
 - [2001a] Многозначные логики // Новая философская энциклопедия. Т. II. М.: Мысль, 586-588.
 - [2001b] Не истинностно-функциональная логика Клини с антибулевой операцией // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М.: ИФРАН, 41-45.
 - [2003] Современные исследования в философской логике // Вопросы философии, 9: 54-75. (Переиздано: Философия. Наука. Культура. "Вопросам философии" 60 лет (под

редакцией академика В.А. Лекторского). М: Вече, 2008, 725-742).

[2004] Предмет логики в свете основных тенденций ее развития // Логические исследования, 11: 149-171.

[2008] *P*-логики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. (Материалы X Общероссийской научной конференции, 26-28 июня 2008 г., Санкт-Петербург). СПб., 2008, 278-280.

[2009] Проблема континуальности трехзначных логик // Шестые Смирновские чтения по логике. (Материалы международной научной конференции, 17 – 19 июня 2009 г., Москва). М.: Современные тетради, 2009, 13-18.

Карпенко А.С. и Попов В.М.

[1997] Новая аксиоматизация импликативного фрагмента бесконечнозначной логики Лукасевича L_{∞} // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М.: ИФРАН, 71-75.

Карпенко А.С. и Шалак В.И.

[1997] Минимальные модели для нечеткой алгебры типа 2 // Там же, 56-63.

Карпенко И.А.

[2001] $RM \vdash \neg(A \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow B)$: полное доказательство // Смирновские чтения. 3 Международная конференция. М.: ИФРАН, 39-40.

Карри Х.

[1969] Основания математической логики. М.: Мир.

Кейслер Г. Дж. и Чэн Ч. Ч.

[1977] Теория моделей. М.: Мир.

Клини С. К.

[1957] Введение в метаматематику. М.: ИЛ. Изд. 2. М.: URSS, 2009.

[1973] Математическая логика. М.: Мир. Изд. 5. М.: URSS, 2008.

Колмогоров А. Н.

[1925] О принципе *tertium non datur* // Математический сборник, 32(4): 668-677. (Переиздано: Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985).

Комендантская Е.Ю.

[2009] Функциональная взаимовыразимость регулярных логик Клини // Логические исследования, 15: 116-128.

Комендантский В.Е.

[2000] *N*-значные изоморфы классической логики. (Дипломная работа, выполненная на кафедре логики философского ф-та МГУ).

[2001] OTTER и доказательство рефлексивности импликации // Труды научно-исследовательского семинара Логического

- центра Института философии РАН. Вып. XV. М.: ИФРАН, 57-60.
- [2003] Теория вывода в многозначных логиках. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата философских наук. М.: ИФ РАН.
- Кон П.
[1968] Универсальная алгебра. М.: Мир.
- Кофман А.
[1982] Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь.
- Крипке С.А.
[1974a] Семантический анализ модальной логики. I. Нормальные модальные исчисления высказываний // Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 254-303.
[1974b] Семантический анализ модальной логики. II. Ненормальные модальные исчисления высказываний // Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 304-323.
- Круглов В.В. и Дли М.И.
[2002] Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. М.: Физматлит.
- Кудрявцев В.Б.
[1970] О покрытиях предполных классов k -значной логики // Дискретный анализ, 19: 32-44.
[1981] О функциональных системах. М.: ВЦ АН СССР.
[1982] Многозначная логика // Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Сов. энциклопедия, 713-720.
- Кузнецов А.В.
[1956] О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 145-146.
[1959] Алгебра логики и ее обобщения // Яновская С.А. Математическая логика и ее основания. В «Математика в СССР за сорок лет». Т. 1. М.: Физматгиз, 13-20.
[1960] Алгебра логики // Философская Энциклопедия. Т. 1. М.: Сов. Энциклопедия, 33-38.
[1961] Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи математических наук, 16(2): 201-202.
[1965] Аналоги "штриха Шеффера" в конструктивной логике // Доклады Академии Наук СССР, 160(2), 274-277.
[1971] Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев, 225-256
[1975] О суперинтуиционистских логиках // Математические исследования, 10(2): 150-158.

Левин В. И.

- [2006] Непрерывная логика. Основные понятия // Логические исследования, 13: 114-131.
- [2008] Непрерывная логика: (история, результаты, библиография). Пенза: ПГТА, 2008.

Лукасевич Я.

- [1959] Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Иностранная литература.
- [1993] О детерминизме // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 190-205. (Переиздано в: Вопросы философии, 5: 60-71. 1995).

Лупанов О.Б.

- [2007] Конспект лекций О.Б. Лупанова по курсу "Введение в математическую логику". М.: МГУ.

Максимова Л. Л.

- [1967] О моделях исчисления E // Алгебра и логика. Т. 6. С. 5-20.
- [1975] Предтабличные расширения модальной логики Льюиса $S4$ // Алгебра и логика, 14: 16-33.

Максимова Л. Л. и Рыбаков В.В.

- [1974] О решетке нормальных модальных логик // Алгебра и логика, 13: 188-216.

Мальцев А. И.

- [1966] Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика, 5: 8-24.
- [1970] Алгебраические системы. М: Наука.
- [1976] Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: НГУ.

Мартынюк В.В.

- [1960] Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках. Проблемы кибернетики, 3: 49-60.

Марченков С.С.

- [1983] О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики Π // Проблемы кибернетики, 40: 261-266.
- [2000] Замкнутые классы булевых функций. М.: ФИЗМАТЛИТ.
- [2001] S -Классификация функций трехзначной логики. М.: ФИЗМАТЛИТ.
- [2002] Булевы функции. М.: ФИЗМАТЛИТ.
- [2004] Функциональные системы с операцией суперпозиции. М.: ФИЗМАТЛИТ.
- [2005] О мощности семейства предполных классов в P_E // Математические заметки, 78(6): 864-869.

Мендельсон Э.

- [1984] Введение в математическую логику. М.: Наука (3-е издание). Изд. 4. М.: URSS, 2010.

- Меськов В. С.
[1986] Очерки по логике квантовой механики. М.: МГУ.
- Месхи В. Ю.
[1974] Семантика Крипке для модальных систем, включающих $S4.3$ // Математические заметки, 15(6): 875-884.
- Минц Г. Е.
[1974] Системы Льюиса и система T [1965-1973] // Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974, 422-509.
- Михеева Е. А.
[1986] Существование в k -значной логике максимальных классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР, 287(1): 49-52.
- Налимов В. В.
[1979] Функция распределения вероятностей как способ задания размытых множеств: наброски метатеории (дискуссия по работам Л. Заде) // Автоматика (Киев), 6: 80-87.
- Новиков П. С.
[1977] Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М.: Наука.
- Орлов И. Е.
[1928] Исчисление совместности предложений // Математический сборник, 35(3-4): 263-286.
- Павлов С. А.
[1994] Логика ложности $FL4$ // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М.: ИФРАН, 14-35.
[2004] Логика с операторами истинности и ложности. М.: ИФРАН.
- Пильчак Б. Ю.
[1952] Об исчислении задач // Украинский математический журнал, 4 (2): 174-194.
- Плиско В. Е. и Хаханян В. Х.
[2009] Интуиционистская логика. М.: МГУ.
- Попов В. М.
[1978] О разрешимости релевантной системы RAO // Модальные и интенциональные логики. М.: Институт философии, 115-119.
[1979] Канонические исчисления для конечных матриц с одним выделенным значением // Логико-методологический анализ научного знания. М.: МГУ, 117-122.
[1984] Семантический и синтаксический анализ импликативно-негативного фрагмента системы RM // Модальные и интенциональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М.: Наука, 192-198.

- [1989] Секвенциальные формулировки паранепротиворечивых логических систем // Синтаксические и семантические исследования неэкстенциональных логик. М.: Наука, 285-289.
- [2002] Об одной трехзначной параполной логике // Логические исследования, 9: 175-178.
- [2003] Об одной четырехзначной паранормальной логике // Логика и В.Е.К. К 90-летию со дня рождения профессора Войшвилло Евгения Казимировича. М.: Современные тетради, 192-195.
- [2009] Между Par и множеством всех формул // Шестые Смирновские чтения по логике. Материалы международной научной конференции, 17 – 19 июня 2009 г., Москва. М.: Современные тетради. С. 93-95.

Поспелов Д.А. (ред.)

- [1986] Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука.

Расёва Е. и Сикорский Р.

- [1972] Математика метаматематики. М.: Наука.

Раца М.Ф.

- [1965a] О классе функций логики, соответствующей первой матрице Яськовского // Исследования по общей алгебре. Кишинев, 99-110.
- [1965b] Критерий эквивалентности универсальной алгебры трехэлементной псевдобулевой алгебре // VII Всесоюзный colloquium по общей алгебре. Резюме сообщений и докладов. Кишинев, 89-90.
- [1969] О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского // Проблемы кибернетики, 21: 185-214.
- [1971] Критерий функциональной полноты в интуиционистской логике высказываний // Доклады Академии Наук СССР, 201(4), 794-797.
- [1982] О функциональной полноте в интуиционистской логике высказываний // Проблемы кибернетики, 39: 107-150.
- [1990] Итеративные цепные классы псевдобулевых функций. Кишинев: Штиница.

Розоноэр Л.И.

- [1983a] О выявлении противоречий в формальных теориях. I // Автоматика и телемеханика, 6: 113-124.
- [1983b]: О выявлении противоречий в формальных теориях. II // Автоматика и телемеханика, 7: 97-104.
- [1993] О семантике противоречивых формальных теорий // Семиотика и информатика, 33: 71-100.

Роутлей Р. и Мейер Р.

- [1981] Семантика следования // Семантика модальных и интенциональных логик. М.: Прогресс, 363-423.

Слупецкий Е.

- [1974] Несколько замечаний о многозначных логиках Яна Лукасевича // Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 177-187.

Сметанич Я. С.

- [1960] О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Труды Московского Математического Общества, 9: 357-371.

Смирнов В. А.

- [1962] Логические взгляды Н. А. Васильева // Очерки по истории логики в России. М.: МГУ, 242-257.
- [1972] Формальный вывод и логические исчисления. М.: Наука. (Переиздано в: [Смирнов 1999], 16-233).
- [1979] Формальный вывод, теоремы дедукции и теории импликации // Логический вывод. М.: Наука, 54-68. (Переиздано в: [Смирнов 1999], 258-276).
- [1983] Секвенциальная формулировка логики Даммета // Семиотические аспекты формализации интеллектуальной деятельности. М. (Переиздано в: [Смирнов 1999], 301-302).
- [1984] Об одной паранепротиворечивой логике // Многозначные, релевантные и паранепротиворечивые логики. М.: ИФ АН СССР, 129-133 (Переиздано в: [Смирнов 1999], 293-298).
- [1987] Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. (М.: URSS, 2002, 2-е изд.).
- [1999] Теория логического вывода. М.: РОССПЭН.

Тарский А.

- [1999] Понятие истины в языках дедуктивных наук // Философия и логика Львовско-Варшавской школы. М.: РОССПЭН, 19-156.

Токаж М.

- [1979] Теоремы, выводимые из критерия Мак-Нотона // Логический вывод. М.: Наука, 43-49.

Томова Н. Е.

- [2009а] Возникновение трехзначных логик: логико-философский анализ // Вестник Московского Университета. Серия 7. Философия, 68-74.
- [2009б] О расширениях логики *Lisp* // Шестые Смирновские чтения по логике (Материалы Междунар. научн. конф., Москва, 17-19 июня 2009 г.). М.: Современные тетради, 2009, 104-106.
- [2009с] О четырехзначных регулярных логиках // Логические исследования, 15: 223-228.
- [2010] Импликативные расширения трехзначных регулярных логик Клини // Логические исследования, 16, 233-258.

Угольников А. Б.

- [1988] О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика, 7: 79-88.

Финн В.К.

- [1969] О предполноте класса функций, соответствующего трехзначной логике Я. Лукасевича // Научно-техническая информация. Сер. 2, 10: 35-38.
- [1970] О классах функций, соответствующих M -значным логикам Я. Лукасевича // Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике. Иваново, 42-43.
- [1971] Об аксиоматизации некоторых трехзначных логик // Научно-техническая информация. Серия 2, 11, 16-20.
- [1974a] Аксиоматизация некоторых трехзначных исчислений высказываний и их алгебр // Философия в современном мире. Философия и логика. М.: Наука, 398-438.
- [1974b] О критерии функциональной полноты для B_3 // Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 194-199.
- [1976] Логические проблемы информационного поиска. М.: Наука.
- [1976a] О возможности формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // VII Всесоюзный симпозиум по логике и методологии науки. Киев, 1976. Тезисы докладов. Киев: Наукова Думка, 82-83.
- [1991] Правдоподобные рассуждения в интеллектуальных системах типа ДСМ // Итоги науки и техники. Сер. Информатика. Т. 15. ВИНТИ, 54-101.
- [1996] Об одном варианте логики аргументации // Научно-техническая информация. Сер. Информационные процессы и системы. № 5-6. С. 3-19.
- [2007] Стандартные и нестандартные логики аргументации I // Логические исследования, 13: 158-190.
- [2008a, ред.] Многозначные логики и их применения. Т. 1: Логические исчисления, алгебры и функциональные свойства. М.: URSS/ЛКИ.
- [2008b, ред.] Многозначные логики и их применения. Т. 2: Логики в системах искусственного интеллекта. М.: URSS/ЛКИ.

Финн В.К., Аншаков О.М., Григолия Р.Ш. и Забежайло М.И.

- [1980] Многозначные логики как фрагменты формализованной семантики // Семиотика и информатика, 15: 27-60. (Перевод на английский: Many-valued logics as fragments of formalized semantics // Acta Philosophica Fennica, 35: 239-272. 1982).

Фреге Г.

- [1977] Смысл и денотат // Семиотика и информатика, 8: 181-210.
- [2000] Логика и логическая семантика. Сборник трудов. М.: Аспект Пресс.

Френкель А. и Бар-Хиллел И.

- [1966] Основания теории множеств. М.: Мир. Изд. 3. М.: URSS, 2010.

Хавьер Санчес П.

- [1978] Семантическое построение системы K_{\neg} с двумя отрицаниями: классическим и релевантным // Модальные и интенциональные логики. М.: Институт философии, 156-159.

Хомич В.И.

- [1986] Об аксиоматизации некоторых табличных логик // Логика и системные методы анализа научного знания. (Тезисы докладов к IX Всесоюзному совещанию по логике, методологии и философии науки. Харьков, 8-10. X. 1986). Секция 1 – 5. М., 49-50.

Чёрч А.

- [1960] Введение в математическую логику. М.: Иностранная литература. Изд. 2. М.: URSS, 2009.

Шейнфинкель М.И.

- [2009] О кирпичах математической логики // Логические исследования, 15: 232-246.

Шестаков В.И.

- [1959] Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем // Логические исследования. М.: Изд-во АН СССР, 315-351.

- [1964] О взаимоотношении некоторых трехзначных логических исчислений // Успехи математических наук, 19. Вып. 2(116): 177-181.

- [1967] О некоторых расширениях исчислений Бочвара и Клини до функционально полных трехзначных исчислений // Научно-техническая Информация. Серия 2(12): 12-17.

- [1971] Об одном фрагменте исчисления Д.А.Бочвара // Информационные вопросы семиотики, лингвистики и автоматического перевода. ВИНТИ. Вып. 1. М.

Шестопад Г.А.

- [1961] О числе простых базисов булевых функций // Доклады Академии Наук, 140(2): 314-317.

Шехтман В.Б.

- [1978] Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление // Доклады АН СССР, 240(3): 549-553.

Шкатов Д.П.

- [2008] Модальная логика и модальные фрагменты классической логики. М.: ИФ РАН.

Шрамко Я.В.

- [2002] Обобщенные истинностные значения: решетки и мультрешетки // Логические исследования, 9: 264-291.

- [2009] Истина и ложь: что такое истинностные значения и для чего они нужны // Логос, 2(70): 96-121.

Энгелер Э.

- [1987] Метаматематика элементарной математики. М.: Мир.

Эсакиа Л.Л.

[1979] Эсакиа Л.Л. К теории модальных и суперинтуиционистских систем // Логический вывод. М.: Наука, 147-172.

[1985] Алгебры Гейтинга I. Теория двойственности. Тбилиси: Мецниереба.

Юрьев Д.Н.

[2001] Новая трехзначная логика // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XV. М.: ИФРАН, 120-125.

Яблонский С.В.

[1952] О суперпозиции функций алгебры логики // Математический сборник, 30(72): 329-348.

[1954] О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады Академии Наук СССР, 95(6): 1153-1156.

[1958] Функциональные построения в k -значной логике // Труды математического института им. В.А.Стеклова. Т. 51, 5-142.

[1959] О некоторых свойствах счетно-замкнутых классов из P_{\aleph_0} // Доклады Академии Наук СССР, 124(5).

[1978] О некоторых результатах в теории функциональных систем // Труды международного конгресса математиков. Хельсинки.

[1986] Введение в дискретную математику. М.: Наука.

Яблонский С.В., Гаврилов Г.П. и Кудрявцев В.Б.

[1966] Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука.

Яблонский С.В., Гаврилов Г.П. и Набебин А.А.

[1997] Предполные классы в многозначных логиках. М.: МЭИ.

Ягер Р. (ред.)

[1986] Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. М.: Мир.

Яглом И.М.

[1980] Булева структура и ее модели. М.: Советское радио.

Янков В.А.

[1968a] Об исчислении слабого закона исключенного третьего // Изв. АН СССР. Сер. "Математика", 32(5): 1044-1051.

[1968b] Построение последовательности сильно независимых суперинтуиционистских пропозициональных исчислений // Доклады Академии Наук СССР, 181(1): С.33-34.

Янов Ю.И. и Мучник А.А.

[1959] О существовании k -значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии Наук СССР, 127: 44-46.

Яновская С.А.

[1959] Математическая логика и основания математики // Математика в СССР за сорок лет, 1917 - 1957. М.: Физматгиз, 13-120.

- Ackerman R.
[1967] An Introduction to Many-Valued Logics. N.Y.: Routledge & Kegan Paul.
- Aczel P.
[1998] Non-Well-Founded Sets. Stanford.
- Aglianò P., Ferreirim I.M.A. and Montagna F.
[2007] Basic hoops: an algebraic study of continuous t norms // *Studia Logica*, 87(1): 73-98.
- Aguzzoli S. and Ciabattoni A.
[2000] Finiteness in infinite-valued Łukasiewicz logic // *Journal of Logic, Language, and Information*, 9: 5-29.
- Aguzzoli S., Ciabattoni A. and Di Nola A.
[2000] Sequent calculi for finite-valued Łukasiewicz logics via Boolean decompositions // *Journal of Logic and Computation*, 10(2): 213-222.
- Aguzzoli S. and Gerla B.
[2002] Finite-valued reductions of infinite-valued logics // *Archive for Mathematical Logic*, 41(4): 361-399.
- Aguzzoli S., D'Antona O.M. and Marra V.
[2005] Brun normal forms for co-atomic Łukasiewicz logics // L. Godo (ed.), *ECSQARU*, 2005, LNAI 3571, 650-661.
- Akama S. and Nagata Y.
[2007] Prior's three-valued modal logic Q and its possible applications // *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 11(1): 105-110.
- Akama, S., Nagata Y. and Yamada C.
[2008] Three-valued temporal logic Q_t and future contingents // *Studia Logica*, 88(2): 215-231.
- Ambas O.
[2001] Anshakov-Rychkov algebras // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 42(4): 211-224.
- Anderson A.R. and Belnap N.D.
[1962] The pure calculus of entailment // *The Journal of Symbolic Logic*, 27(1): 19-52.
[1963] First degree entailment // *Mathematische Annalen*, 149: 302-319.
[1975] *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Princeton University Press.
- Anderson A.R., Belnap N.D. and Dunn J.M.
[1992] *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. 2. Princeton University Press.
- Andréka H., Németi I. and Sain I.
[2001] Algebraic logic // D. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*. Second Edition. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer.

Anshakov O.M., Finn V.K. and Skvortsov D.P.

- [1989] On axiomatization of many-valued logics associated with formalization of plausible reasoning // *Studia Logica*, 48(4): 423-447.

Anshakov O. and Rychkov S.

- [1994] On finite-valued propositional logical calculi // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 36(4): 606-629.

Åqvist L.

- [1962] Reflexions on the logic of nonsense // *Theoria*, 28: 138-157.

Arieli O. and Avron A.

- [1994] Logical bilattices and inconsistent data // *Proceedings of the 9th Annual Semposium on Logic in Computer Science*. IEEE Computer Society Press, 468-476.
- [1996] Reasoning with logical bilattices // *Journal of Logic, Language, and Information*, 5(1): 25-63.
- [1998] The value of four values // *Artificial Intelligence*, 102: 97-141.

Arruda A.I.

- [1975] Remarques sur les systèmes C_n // *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris. Séries A-B*, 280: 1253-1256.
- [1977] On the magionary logic of N.A. Vasil'ev // *Non-Classical logics, Model Theory and Computability*. Amsterdam: Nort-Holland, 3-24.
- [1980] A survey of paraconsistent logics // A.I. Arruda *et al* (eds.). *Mathematical logic in latin America*. Dordrecht: North-Holland, 1-41.

Asenjo F.G.

- [1953] La Idea de un Calculo de Antinomias // *Seminario Matematico*. Universidad Nacional de La Plata.

Asenjo F.G. and Tamburino J.

- [1975] Logic of antinomies // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 16 (1): 17-44.

Atanassov K.

- [1986] Intuitionistic fuzzy sets // *Fuzzy Sets and Systems*, 20: 87-96.
- [1999] *Intuitionistic Fuzzy Sets*. Berlin: Springer.

Avelone A., Ferrari M. and Miglioli F.

- [1999] Duplication-free tableau calculi and related cut-free sequent calculi for the interpolable propositional intermediate logics // *Logical Journal of IGPL*, 7(4): 447-480.

Avelone A. *et al*.

- [1999] A tableau calculus for Dummett predicate logic // W.A. Carnielli and I.M. D'Ottaviano (eds.). *Advances in Contemporary Logic and Computer Science*. Providence: American Mathematical Society.

- Avron A.
- [1984] Relevant entailment – semantics and formal systems // The Journal of Symbolic Logic, 49(2): 334-342.
 - [1986] On an implicational connective of RM // Notre Dame Journal of Formal Logic, 27 (2): 201-209.
 - [1987] A constructive analysis of RM // The Journal of Symbolic Logic, 52(2): 939-951.
 - [1990] Relevance and paraconsistency – a new approach // The Journal of Symbolic Logic, 55(2): 707-732.
 - [1991a] Natural 3-valued logics – characterization and proof theory // The Journal of Symbolic Logic, 56 (1): 276-294.
 - [1991b] Using hypersequent in proof systems for non-classical logics // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 4: 225-248, 1991.
 - [1999a] On the expressive power of three-valued and four-valued languages // Journal of Logic and Computation, 9: 977-994.
 - [1999b] On the proof theory of natural many-valued logics // Collegium Logicum (Annals of the Kurt Gödel Society) 3, 51-59.
 - [2003] Classical Gentzen-type methods in propositional many-valued logics // [Fitting and Orłowska 2003], 117-155.
 - [2009] Multi-valued semantics: Why and How // Studia Logica, 92(20): 163-182.
- Avron A. and Konikowska B.
- [2001] Decomposition proof systems for Gödel-Dummett logics // Studia Logica, 69: 197-219.
- Avron A. and Lev I.
- [2005] Non-deterministic multiple-valued structures // Journal of Logic and Computation, 15: 241-261.
- Baaz M.
- [1986] Kripke-type semantics for da Costa's paraconsistent logic C_ω // Notre Dame Journal of Formal Logic, 27: 523-527.
 - [1996] Infinite-valued Gödel logics with 0-1 projections and relativizations // Lecture Notes in Logic. Vol. 6. New York: Springer, 23-33.
- Baaz M., Fermüller C.G. and Zach R.
- [1994] Elimination of cuts in first-order finite-valued logics // Journal of Information Processing and Cybernetics. Vol. 6. P. 333-355.
- Baaz M. and Zach R.
- [1994] Approximating propositional calculi by finite-valued logics // International Symposium on Multiple-Valued Logic. Los Alamitos: IEEE Press, 257-263.
- Baaz M. and Fermüller C.G.
- [1996] Combining many-valued and intuitionistic tableaux // P. Miglioli *et al* (eds.), Theorem Proving with Tableaux and Related Methods. Springer-Verlag. 65-79.

- Baaz M, Fermüller C.G., Salzer G. and Zach R.
 [1998] Labeled calculi and finite-valued logics // *Studia Logica*, 61: 7-33.
- Baaz M., Fermüller C.G. and Salzer G.
 [2001] Automated deduction for many-valued logics // A. Robinson and A. Voronkov (eds.). *Handbook of Automated Reasoning*. Elsevier, 1354-1402.
- Baaz M, Preining N. and Zach R.
 [2007] First-order Gödel logics // *Annals of Pure and Applied Logic*, 147(1-2): 23-47.
- Baczynski M. and Jayaram B.
 [2008] *Fuzzy Implications*. Berlin: Springer.
- Baghramian M. and Simons P. (eds.)
 [2000x] *Łukasiewicz and Modern Logics*. Dordrecht: Kluwer (in print).
- Balbes R. and Dwinger Ph.
 [1974] *Distributive lattices*. Columbia, Miss.
- Barringer H., Cheng J.H., and Jones C.B.
 [1984] A logic covering undefinability in program proofs // *Acta Informatica*, 21: 251-269.
- Bartels F.
 [2003] Generalized coinduction // *Math. Structures Comput. Sci.*, 13: 321-348.
- Barton S.
 [1979] The functional completeness of Post's m -valued propositional calculus // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 25(5): 445-446.
- Barwise J. and Perry J.
 [1981] Semantic innocence and uncompromising situations // *Midwest Studies in the Philosophy of Language*, VI: 387-403.
- Batens D.
 [1980] Paraconsistent extensional propositional logics // *Logique et Analyse*, 23(90-91): 127-139.
 [1982] A bridge between two-valued and many-valued semantic systems: n -tuple semantics // *International Symposium on Multiple-valued logic*. 12th, Paris, 318-322.
 [1989] Dynamic dialectical logics // [Priest, Routley and Norman 1989], 187-217.
- Battilotti G. and Sambin G.
 [1999] Basic logic and the cube of its extensions // A. Cantini (eds.). *Logic and Foundations of Mathematics*. Dordrecht: Kluwer, 165-186.
- Beavers G.
 [1993a] Automated theorem proving for Łukasiewicz logics // *Studia Logica*. Vol. 52. N 2. P. 183-195.

- [1993b] Extensions of the \aleph_0 -valued Łukasiewicz propositional logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, 34(2): 251-262.
- Bechio D.
[1978] Logique trivalente de Łukasiewicz // Univ. Clermont Math, 16: 33-83.
- Bell J.C. and van Fraassen B.C.
[2003] Possibilities and Paradox: An Introduction to Modal and Many-Valued Logic. Oxford: Oxford Univ. Press.
- Bellman R.E. and Zadeh L.A.
[1977] Local and fuzzy logics // [Epstein and Dunn (eds.), 1977], 103-165.
- Belluce L.P. and Chang C.C.
[1963] A weak completeness theorem for infinite valued first-order logic // The Journal of Symbolic Logic, 28: 43-50.
- Belluce L.P.
[1997] Generalized fuzzy connectives on *MV*-algebras // J. Math. Anal. Appl, 1: 485-499.
- Belnap N.D.
[1960] Entailment and relevance // The Journal of Symbolic Logic, 25: 144-146.
[1967] Intensional models for first degree formulas // The Journal of Symbolic Logic, 32: 1-22.
[1977a] How computers should think // G. Ryle (ed.). Contemporary Aspects of Philosophy. Stocksfield: Oriel Press, 30-56.
[1977b] A useful four-valued logic // [Epstein and Dunn (eds.), 1977], 7-37.
- Belnap N.D. and Spencer J.H.
[1966] Intensionally complemented distributive lattices // Portugaliae Mathematica, 25(1-4): 99-104.
- Bendová K.
[2005] Interpolation and three-valued logics // Reports on Mathematical Logic, 39: 127-131.
- Bergmann M.
[2008] An introduction to Many-Valued and Fuzzy Logic: Semantics, Algebras, and Derivation Systems. Cambridge University Press.
- Berman J.
[1980] A proof of Lyndon's finite basis theorem // Discrete Mathematics, 29: 229-233.
- Bernays P.
[1926] Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der "Principia Mathematica" // Mathematische Zeitschrift, 25: 305-320.

Béziau J.-Y.

- [1995] Recherches sur la logique universelle. Ph.D. Dissertation, Dept. of Mathematics, Université de Paris VII.
- [1997] What is many-valued logic? // 27th International Symposium on Multiple-Valued Logic. IEEE Computer Society Press. Los Alamitos, 117-121.
- [1999] Was Frege wrong when identifying reference with truth-value? // *Sorites*, 11: 15-23.
- [2006] Many-valued and Kripke semantics // J.van Benthem et al. (eds.). *The Age of Alternative Logics Assessing Philosophy and mathematics Today*. Springer Netherlands, 89-101.

Béziau J.-Y., Carnielli W. and Gabbay D. (eds).

- [2007] *Handbook of Paraconsistency (Studies in Logic)*. London: King's College, 2007.

Białynicki-Birula A. and Rasiowa H.

- [1957] On the representation of quasi-Boolean algebras // *Bulletin de la Academie Polonaise des Sciences*, Cl. III, 5: 259-261.

Bigaj T.

- [2001] Three-valued logic, indeterminacy and quantum mechanics // *Journal of Philosophical Logic*, 30 (2): 97-119.

Bimbó K. and Dunn M.J.

- [2001] Four-valued logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 43(3): 171-192.

Birkhoff G. and von Neumann J.

- [1936] The logic of quantum mechanics // *Annals of Mathematics*, 37: 823-843.

Blamey S.

- [1986] Partial logic // D.M. Gabbay and F. Guenther (eds). *Handbook of Philosophical Logic Vol. III: Alternatives in Classical Logic*. Dordrecht: Reidel, 1-70.

Blau U.

- [1978] *Die dreiwertige Logik der Sprache: ihre Syntax, Semantik und Anwendung in der Sprachanalyse*. Berlin: de Gruyter.

Blok W.J.

- [1976] *Varieties of Interior Algebras*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1976.
- [1980] Pretabular varieties of modal algebras // *Studia Logica*, 39: 101-124.

Blok W.J. and Pigozzi D.

- [1986] Protoalgebraic logics // *Studia Logica*, 45: 337-369.
- [1989] *Algebraizable Logics (monograph)* // *Memoirs of the American Mathematical Society A.M.S., Providence*. Vol. 396.

- Blok W. and Rebagliato J.
 [2003] Algebraic semantics for deductive systems // *Studia Logica* (Special Issue on Abstract Algebraic Logic, Part II), 74: 153-180.
- Blok W.J. and Raftery J.G.
 [2004] Fragments of R -Mingle // *Studia Logica*, 78(1/2): 59-106.
- Bochman A.
 [1998] Biconsequence relation: a four-valued formalism of reasoning with inconsistency and incompleteness // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 39(1): 47-73.
- Boicescu V., Filipoi A., Georgescu G. and Rudeanu S.
 [1991] Łukasiewicz-Moisil Algebras. Amsterdam: North-Holland.
- Bolc L. and Borowik P.
 [1992] Many-valued logics. Vol. 1: Theoretical Foundations. Berlin: Springer-Verlag.
 [2000] Many-valued logics. Vol. 2: Automated Reasoning and Practical Applications. Berlin: Springer-Verlag.
- Bosbach B.
 [1974] Residuation groupoids // *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe 3*, XXII(2): 103-104.
 [1981] Concerning bricks // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 38: 89-104.
- Brady R.T.
 [1976] A computer program for determining matrix models of propositional calculi // *Logique et Analyse*, 19(74-76): 233-235.
 [1982] Completeness proofs for systems $RM3$ and $BN4$ // *Logique et Analyse*, 25: 51-61.
- Brouwer L.E.J.
 [1975] The unreliability of the logical principles // Brouwer L.E.J. *The Collected Works*. Dordrecht: Reidel.
- Brown D.J. and Suszko R.
 [1973] Abstract logics // *Dissertationes Mathematicae*, 102: 7-41.
- Brunner A.B.M. and Carnielli W.A.
 [2008] Anti-intuitionism and paraconsistency // *Journal of Applied Logics*, 3(1): 161-184.
- Buff H. W.
 [1985] Decidable and undecidable MV -algebras // *Algebra Universalis*, 21: 234-249.
- Bulatov A., Lau D. and Strauch B.
 [1996] The cardinalities of sublattices of depth 2 in the lattices of clones on a 3-elementary set. Preprint Universität Rostock.
- Bulatov A. A.
 [2001] Conditions satisfied by clone lattices // *Algebra Universalis*, 45(1-2): 379-389.

- Bull R.A.
 [1964] An axiomatization of Prior's modal calculus Q // Notre Dame Journal of Formal Logic, V(3): 211-214.
 [1965] A modal extension of intuitionistic modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, VI(2): 142-146.
- Bull R.A. and Segerberg K.
 [1984] Basic modal logic // D.M. Gabbay and F. Guentner (eds). Handbook of Philosophical Logic. Vol. II: Extensions of Classical Logic. Dordrecht: Reidel, 1-88.
- Bunder M. W.
 [2002] Combinators, proofs and implicational logics // D. Gabbay and F. Guentner (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd edn., Vol. 6. Dordrecht: Kluwer, 229-286.
- Burris S. and Sankappanavar H.P.
 [1981] A Course in Universal Algebra. N.Y. – Berlin: Springer-Verlag.
- Butler J.T.
 [1991] Multiple-valued logic in VLSI. Los Alamitas: IEEE Computer Society Pres.
- Butler J.W.
 [1960] On complete and independent sets of operations in finite algebras // Pacific. J. Mathematics, 10: 1169-1179.
- Butler S.W. and Butler J.T.
 [1992] Profiles of topics and authors of the International Symposium on Multiple-Valued Logic for 1971-1991 // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 22th. Sendai, 372-379.
- Byrd M.
 [1979] A formal interpretation of Łukasiewicz's logics // Notre Dame Journal of Formal Logic, 20(2): 366-368.
- Caferra R. and Zabel N.
 [1990] An application of many-valued logic to decide propositional formulae: a strategy designed for a parameterized tableaux based theorem prover // Proceedings of Artificial Intelligence IV: Methodology, Systems, Applications. Elsevier, 23-32.
- Cain J. and Damnjanovic Z.
 [1991] On the weak Kleene scheme in Kripke's theory of truth // Journal of Symbolic Logic, 56: 1452-1468.
- Caleiro C. and Marcos J.
 [2009] Classic-like analytic tableaux for finite-valued logics // Lecture Notes in Artificial Intelligence. Vol. 5514, 268-280.
- Caleiro C., Carnielli W., Coniglio M. and Marcos J.
 [2005] Two's Company: "The Humburg of many-logical values" // J.-Y. Béziau (ed.). Logica Universalis. Birkhäuser Verlag, 169-189.

Caleiro C., Gonçalves R. and Martins M.

- [2009] Behavioral algebraization of logics // *Studia Logica*, 91(1): 63-111.

Carnielli W.A.

- [1987] Systematization of finite-valued logics through the method of tableaux // *The Journal of Symbolic Logic*, 52: 473-493.
- [1990] Many-valued logics and plausible reasoning // *International Symposium on Multiple-Valued Logics*. 20th. University of Charlotte, USA, IEEE Computer Society, 328-335.
- [1991] On sequents and tableaux for many-valued logics // *The Journal of Non-Classical Logic*, 8: 59-76.
- [2000] Possible translations semantics for paraconsistent logics // *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Baldock: Research Studies Press, 149-163.

Carnielli W.A. and Lima-Marques M.

- [1999] Society semantics for multiple-valued logics // W.A. Carnielli and I.M.L. D'Ottaviano (eds.), *Advances in Contemporary Logic and Computer Sciences*. American Mathematical Society, 33-52.

Carnielli W.A. and Marcos J.

- [1999] Limits for paraconsistent calculi // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40: 375-390.

Carnielli W.A., Marcos J., and de Amo S.

- [2000] Formal inconsistency and involutory databases // *Logic and logical Philosophy*, 8(2): 115-152.

Carnielli W.A. and Coniglio M.E.

- [2007] Combining logics // *Stanford Encyclopedia Philosophy* (online).

Carnielli W.A., Coniglio M.E. and Marcos J.

- [2007] Logics of formal inconsistency // D. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd edn., Vol. 14. Dordrecht: Kluwer, 1-93.

Carnielli W.A., Coniglio M.E., Gabbay D.M., Gouveia P. and Sernadas C.

- [2008] *Analysis and Synthesis of Logics: How to Cut and Paste Reasoning Systems*. Dordrecht: Springer.

Castillo O. and Melin P.

- [2008] *Type-2 Fuzzy Logic Theory and Applications*. Berlin: Springer.

Caton C.E.

- [1963] A stipulation of a modal propositional calculus in terms of modalized truth-values // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 4: 224-226.

Cattaneo G. and Lombardo F.

- [1998] Independent axiomatization of MV-algebras // *Tatra Mountains mathematical publication*, 15: 227-232.

- Cattaneo G., Dalla Chiara M. L. and Giuntini R.
 [1998] Some Algebraic Structures for Many-Valued Logics // Tatra Mountains Mathematical Publication, 15: 173-196.
- Cattaneo G., Giuntini R. and Pilla R.
 [1999] $BZMV^{dM}$ and Stonian MV algebras (Applications to fuzzy sets and rough approximations) // Fuzzy Sets Systems, 108: 201-222.
- Cattaneo G. and Ciucci D.
 [2002] Heyting-Wajsberg algebras as an abstract environment linking fuzzy and rough sets // Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 2475, 77-84.
- Cattaneo G, Ciucci D, Giuntini R. and Konig M.
 [2004a] Algebraic structures related to many valued systems. Part I: Heyting Wajsberg algebras // Fundamenta Informaticae, 63(4): 331-355.
 [2004b] Algebraic structures related to many valued systems. Part II: equivalence among some widespread structures // Fundamenta Informaticae, 63(4): 357-373.
- Chagrov A. and Zakharyascnev M.
 [1993] The undecidability of the disjunction property of propositional logics and other related problems // The Journal of Symbolic Logic, 58(3): 967-1001.
 [1997] Modal Logic. Oxford: Clarendon Press.
- Chang C.C.
 [1958a] Proof of an axiom of Łukasiewicz // Transactions of the American Mathematical Society, 87: 55-56.
 [1958b] Algebraic analysis of many-valued logics // Ibid., 88: 467-490.
 [1959] A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms // Ibid., 93: 74-80.
 [1963] Logic with positive and negative truth-values // Acta Philosophica Fennica, XVI: 19-39.
- Chang C.C. and Keisler H.J.
 [1966] Continuous Model Theory. Princeton Univ. Press. (Перевод на русс.: Кейслер Г.Дж. и Чэн Ч.Ч. Теория непрерывных моделей. М.: Мир, 1971).
 [1990] Model Theory. Amsterdam: Elsevier Science Publ.
- Church A.
 [1936] An unsolvable problem of elementary number theory // American Journal of Mathematics, 58:345-363.
 [1937] Review of [Birkhoff and Neumann, 1936] // The Journal of Symbolic Logic, 2(1): 44.
 [1951] The weak theory of implication // Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkul und der Logik der Einzelwissenschaften. München, 22-37. (Abstract: The weak positive implicational propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic, 16(3): 238. 1951).

Ciabattoni A. and Luchi D.

- [1997] Two connections between linear logic and Łukasiewicz logics // G. Gottlob, A. Leitsch and D. Mundici (eds). Proceedings of Computational Logic and Proof Theory. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1289. Berlin: Springer-Verlag, 128-139.

Cignoli R.

- [1970] Moisil algebras // Notas de Mathematica. N 27. Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.
- [1980] Some algebraic aspects of many-valued logics // Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic. São Paulo, 49-69.
- [1982] Proper n -valued Łukasiewicz algebras as S -algebras of Łukasiewicz n -valued propositional calculi // Studia Logica, 41(1): 3-16.
- [1993] Free lattice-ordered abelian groups and varieties of MV-algebras // Proceedings of the IXth Latin American Symposium on Mathematical Logic, I. Bahía Blanca, 113-118.

Cignoli R. and de Gallego M.S.

- [1981] The lattice structure of some Łukasiewicz algebras // Algebra Universalis, 13: 315-328.

Cignoli R. and Monteiro A.

- [1965] Boolean elements in Łukasiewicz algebras. II // Proceedings of Japan Academy, 41: 676-680.

Cignoli R., and Monteiro L.

- [2006] Maximal subalgebras of MV_n -algebras. A proof of a conjecture of A. Monteiro // Studia logica, 84(3): 393-405.

Cignoli R. and Mundici D.

- [1997a] An elementary proof of Chang's completeness theorem for the infinite-valued calculus of Łukasiewicz // Studia Logica, 58(1): 79-97.
- [1997b] An invitation to Chang's MV -algebras // M. Droste and R. Göbel (eds.). Advances in Algebra and Model Theory. Reading, UK: Gordon and Breach Publ. Group, 171-197.

Cignoli R., Esteva F., Godo L. and Torrens A.

- [2000] Basic fuzzy logic is the logic of continuous t -norms and their residua // Soft Computing, 4: 106-112.

Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., and Mundici D.

- [2000] Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning. Dordrecht: Kluwer.

Cintula P.

- [2005] Short note: On the redundancy of axiom (A3) in BL and MTL // Soft Computing, 9: 942.

Cintula P. and Hájek P.

- [2010x] Triangular norm based predicate fuzzy logics // Fuzzy Sets and System (submitted).

- Cintula P. and Noguera C.
 [2010x] A hierarchy of implicational (semilinear) logics: the propositional case (submitted).
- Clay R.E.
 [1962] Note on Shupecki T-functions // The Journal of Symbolic Logic, 27(1): 53-54.
- Cleave J.
 [1974] The notion of logical consequence in the logic of inexact predicates // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 20: 307-324.
- Cornelis C., Atanassov K.T. and Kerre E.E.
 [2003] Intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets: a critical comparison // Proceedings of the 3rd European Society Conference on Fuzzy Logic and Technology. Zittau, Germany, 159-163.
- Correia F.
 [2001] Priorean strict implication, \mathcal{Q} and related systems // Studia Logica, 69(3): 411-427.
- Corsi G.
 [1992] Completeness theorem for Dummett's LC quantified and some of its extensions // Studia Logica, 51(2): 53-67.
- Cs  kary B. and Rosenberg I. (eds.)
 [1981] Finite algebra and multiple-valued logic. Amsterdam etc.
- Curry H.B.
 [1952] The elimination theorem when modality is present // The Journal of Symbolic Logic, 17: 249-265.
 [1954] Generalisation of the deduction theorem // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol. 2. Amsterdam, 399-400.
- Curry H.B. and Feys R.
 [1958] Combinatory Logic. Vol. 1. Amsterdam: North-Holland.
- Czelakowski J.
 [1992] Protoalgebraic Logic. Dordrecht: Kluwer, 2001.
- Czermak J.
 [1977] A remark on Gentzen's calculus of sequents // Notre Dame Journal of Formal Logic, 18(3): 471-474.
- Da Costa N.C.A.
 [1963] Calculus propositionnels pour les systèmes formels inconsistants // Comptes Rendue des Sciences de l'Academie des Sciences de Paris, 257: 3790-3792.
 [1974] On the theory of inconsistent formal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic, 15: 497-510.

- Da Costa N.C.A. and Guillaume M.
 [1965] Négations composées et la loi de Peirce dans les systèmes C_n // Portugalia Mathematica, 24(4): 201-210.
- Da Costa N.C.A. and Alves E.H.
 [1977] A semantical analysis of the calculi C_n // Notre Dame Journal of Formal Logic, 18: 621-630.
 [1981] Relations between paraconsistent logic and many-valued logic // Bulletin of the Section of Logic, 10(4): 185-191.
- Da Costa N.C.A., Béziau J.-Y. and Bueno O.A.S.
 [1996] Malinowski and Suszko on many-valued logics: On the reduction of many-valuedness // Modern Logic, 6(3): 272-299.
- Da Costa N.C.A., Krause D. and Bueno O.A.S.
 [2007] Paraconsistent logic and paraconsistency: Technical and philosophical development // D. Jacquette (ed.). Philosophy of Logic. Dordrecht: Elsevier, 791-911.
- Da Costa N.C.A. and Krause D.
 [2000x] Remarks on the applications of paraconsistent logic to physics (to appear).
- Dahn B.
 [1974] Kripke-style semantics for some many-valued propositional calculi // Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe 3, XXII(2): 99-102.
- De Baets B., Esteva F., Fodor J. and Godo L.
 [1999] Systems of ordinal fuzzy logic with applications to preference modelling // Proc. Eusflat-Estylf Joint Conference. Spain. Univ. de las Islas Baleares, 47-50.
- Delahaye J.P. and Thibau V.
 [1991] Programming in three-valued logic // Theoret. Comput. Sci., 78: 189-246.
- Demetrovics J. and Hannak L.
 [1983] The number of reducts of a preprimal algebra // Algebra Universalis, 16: 178-185.
- Destouches-Février P.
 [1949] Logique et théories physiques // Synthèse, 7: 400-410.
 [1951] La structure des théories physiques. Paris.
- Dienes P.
 [1949] On ternary logic // The Journal of Symbolic Logic, 14(2): 85-94.
- Dilworth R.P. and Ward M.
 [1939] Residuated lattices // Transactions of the American Mathematical Society, 45: 335-354
- Di Nola A. and Lettieri A.
 [1994] Perfect MV -algebras are categorically equivalent to Abelian L -groups // Studia Logica, 53(2): 417-432.

- Di Nola A, Georgescu G. and Spada L.
 [2008] Forcing in Łukasiewicz predicate logic // *Studia Logica*, 89(1): 111-145.
- Doming X., Trilles E. and Valverde L.
 [1981] Pushing Łukasiewicz-Tarski implication a little further // *International Symposium on Multiple-Valued Logic*. 11th. Oklahoma, 232-234.
- D'Ottaviano I.M.L.
 [1985] The completeness and compactness of a three-valued first-order logic // *Revista Colombiana de Matemáticas*, XIX (1-2): 32-42.
 [1987] Definability and quantifier elimination for J_3 -theories // *Studia Logica*, 46 (1): 37-54.
- D'Ottaviano I.M.L., da Costa N.C.A.
 [1970] Sur un problème de Jaśkowski // *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 270A: 1349-1353.
- D'Ottaviano I.M.L. and Epstein R.L.
 [1988] A paraconsistent many-valued propositional logic: J_3 // *Reports on Mathematical Logic*, 22: 89-103.
- Dubois D. and Prade H.
 [1979a] Operation in a fuzzy-valued logic // *Information and Control*, 43(2): 224-240.
 [1979b] New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators // *First Symposium on Policy Analysis and Information Systems*. North Caroline, USA, 167-174.
 [1994] Recent literature // *Fuzzy sets and systems*, 63(3): 385-398.
 [2000 (eds.)] *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Boston: Kluwer.
- Dubois D., Prade H. and Sessa S.
 [1994a] Recent literature // *Fuzzy sets and systems*, 66(1): 119-131.
 [1994b] Recent literature // *Fuzzy sets and systems*, 67(2): 347-256.
- Dubois D., Gottwald S., Hájek P., Kacprzyk J. and Prade H.
 [2005] Terminological difficulties in fuzzy set theory – The case of "Intuitionistic fuzzy sets" // *Fuzzy Sets and Systems*, 156: 485-491.
- Dugundji J.
 [1940] Note on property of matrices for Lewis and Langford's calculi of propositions // *The Journal of Symbolic Logic*, 5: 150-151.
- Dumitriu A.
 [1971] *Logica polivalentă*. Bucharest: Viata Literara.
- Dummett M.
 [1959] A propositional calculus with denumerable matrix // *The Journal of Symbolic Logic*, 24: 97-106.
 [1977] *Elements of Intuitionism*. Oxford University Press.

- Dummet M. and Lemmon E.
 [1959] Modal logics between S4 and S5 // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 5: 250-264.
- Dunn J.M.
 [1966] The Algebra of Intensional Logics. PhD thesis. University of Pittsburgh.
 [1970] Algebraic completeness results for R-mingle and its extensions // The Journal of Symbolic Logic, 35: 1-13.
 [1976] Intuitive semantics for first-degree entailment and «coupled trees» // Philosophical Studies, 29: 149-168.
 [1986] Relevance logic and entailment // D.M. Gabbay and F. Guenther (eds.). Handbook of Philosophical Logic. Vol. III: Alternatives in Classical Logic. Dordrecht: Reidel, 117-224.
 [2000] Partiality and its dual // Studia Logica, 65: 5-40.
- Dunn J.M. and Meyer R.K.
 [1971] Algebraic completeness results for Dummett's *LC* and its extensions // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 17: 225-230.
- Dunn J.M. and Hardegree G.
 [2001] Algebraic Methods in Philosophical Logic. Oxford: Oxford University Press.
- Dunn M. and Restall G.
 [2002] Relevance logic // D.M. Gabbay and F. Guenther (eds.). Handbook of Philosophical Logic, 2nd edn., Vol. 6. Dordrecht: Kluwer, 1-128.
- Dwinger Ph.
 [1977] A survey of the theory of Post algebras and their generalizations // [Epstein G. and Dunn J.M. (eds.), 1977], 53-75.
- Dyckhoff A.
 [1999] Deterministic terminating sequent calculus for Gödel-Dummette logic // Logical Journal of IGPL, 7: 319-326.
- Dyrda K.
 [1985] On classification of commutative BCK-logics // Bulletin of the Section of Logic, 14(1): 30-33.
- Dziobiak W.
 [1983] There are 2^{\aleph_0} logics with the relevance principle between R and RM // Studia Logica, XLII(1): 49-60.
 [1991] A finite matrix whose set of tautologies is not finitely axiomatizable // Reports on Mathematical Logic, 25: 83-90.
- Ebbinghaus H.-D.
 [1969] Über eine Prädikatenlogik mit partiell definierten Prädikaten und Funktionen // Arch. math. Logik und Grundl, 12: 39-53.

Elkan C.

- [1993] The paradoxical success of fuzzy logic // Proceedings of the 11th National Conference on Artificial Intelligence. MIT Press, 203-244.

Epstein G.

- [1960] The lattice theory of Post algebras // Transactions of the American Mathematical Society, 95: 300-317. (Переиздано в: [Rine (ed.), 1977], 17-34).
[1993] Multiple-valued Logic Design: An Introduction. Bristol: Institute of Physics Publishing.

Epstein G. and Dunn J.M. (eds.)

- [1977] Modern Uses of Multiple-Valued Logic. Dordrecht: Reidel.

Epstein G., Frieder G. and Rine D. C.

- [1974] The development of multiple-valued logic as related to computer sciences // Computer (Long Beach), 7(9): 20-32.

Epstein G. and Horn A.

- [1974] *P*-algebras, an abstraction from Post algebras // Algebra Universalis, 4: 195-206.

Epstein G. and Rasiowa H.

- [1990] Theory and uses of Post algebras of order $\omega + \omega^*$. I // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 20th. Charlotte/NC. IEEE Computer Soc., New York, 42-47.
[1991] Theory and uses of Post algebras of order $\omega + \omega^*$. Part II // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 21th. Victoria B.C. IEEE Computer Soc., New York, 248-254.

Epstein R.L.

- [1990] The Semantic Foundations of Logic. Vol. 1: Propositional Logic. Dordrecht: Kluwer. (2nd ed. 1995).

Ernst Z.

- [2002] Completions of TV_{\rightarrow} from H_{\rightarrow} // Bulletin of the Section of Logic, 31(1): 7-14.

Esteva F. and Godo L.

- [2010x] Monoidal *t*-norm based logic: towards a logic for left-continuous *t*-norms // Fuzzy Sets and Systems, 124(3): 271-288.
[2000x] *T*-norm based fuzzy logics: Hilbert-style axiomatizations and hypersequent calculi (paper).

Evans T. and Schwartz P.B.

- [1958] On Shupecki *T*-functions // The Journal of Symbolic Logic, 23: 267-270.

Feferman S.

- [1974] Application of manysorted interpolation theorems // Proceedings of the Tarski Symposium. Providence, 205-224.

- Fenstad J.E.
 [1964] On the consistency of the axiom of comprehension in the Łukasiewicz infinite-valued logic // *Mathematica Scandinavica*, 14: 65-74.
- Fernández V.L. and Coniglio M.E.
 [2003] Combining valuations with society semantics // *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 13(1): 21-46.
- Février P.-D.
 [1951] *La Structure des Théories Physiques*. Presses Universitaires de France, Paris.
- Feys R.
 [1955] Boolean methods of development and interpretation // *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 57. Section A. No. 6
- Fidel M.
 [1977] The decidability of the calculi C_n // *Reports on Mathematical Logic*, 8:31-40.
- Fine K.
 [1974] An ascending chain of *S4* logics // *Theoria*, 40: 110-116.
- Finn V.K.
 [1974] Criterion of functional completeness for B_3 // *Studia Logica*, 33(2): 121-125.
 [1975] Some remarks on non-Postian logics // *Vth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Contributed papers. Section 1. Ontario, Canada, 9-10.
- Finn V. and Grigolia R.
 [1980] Bochvar's algebras and their corresponding propositional calculi // *Bulletin of the Section of Logic*, 9: 39-45.
 [1993] Nonsense logics and their algebraic properties // *Theoria*, LIX. Parts 1-3: 207-273.
- Fitting M.
 [1969] *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*. Amsterdam: North-Holland.
 [1989a] Negation as refutation // *Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science*. IEEE Computer Society Press, 63-70.
 [1989b] Bilattices and the theory of truth // *Journal of Philosophical Logic*, 18: 225-256.
 [1990] Bilattices in logic programming // *International Symposium on Multiple-Valued Logic*. 20th, IEEE Press, 238-246.
 [1991] Bilattices and the semantics of logic programming // *Journal of Logic Programming*, 11: 91-116.
 [1992] Kleene's logic, generalized // *Journal of Logic and Computation*, 1: 799-810.
 [1994] Kleene's three-valued logic and their children // *Fundamenta Informaticae*, 20: 113-131.

- [2006] Billatices are nice thing // T. Bolander, V. Hendrick and S.A. Pederson (eds.). *Self-References*. Stanford: CSLI-Publications, 53–77.
- Fitting M. and Ben-Jacob M.
 [1988] Stratified and three-valued logic programming semantics // *Logic Programming. Proc. of the Fifth International Conference and Symposium* (eds. R.A. Kowalski and K.A. Bowen), 1054-1069.
- Fitting M. and Mendelsohn R.L.
 [1998] *First-order Modal Logic*. Dordrecht: Kluwer.
- Fitting M. and Orłowska E. (eds.).
 [2003] *Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic*. Berlin: Springer.
- Fodor J.
 [1991] On fuzzy implication operators // *Fuzzy Sets and Systems*, 42 (3): 293-300.
- Font J.M.
 [1997] Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices // *Logic Journal of the IGPL*, 5(3): 413-440.
 [1999] Addendum to the paper "Belnap's four-valued logic and De Morgan lattices" // *Logic Journal of the IGPL*, 7(5): 671-672.
 [2003] Generalized matrices in abstract algebraic logic // V.F. Hendricks and J. Malinowski (eds.). *Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica*. Dordrecht: Kluwer, 57-86.
 [2009] Taking degrees of truth seriously // *Studia Logica*, 91: 383-406.
- Font J. M., Rodriguez A. J. and Torrens A.
 [1984] Wajsberg algebras // *Stochastica*, 8: 5-31.
- Font J.M. and Péres G.R.
 [1992] A note on Sugihara algebras // *Publication Mathématiques*, 36: 591-599.
- Font J.M. and Jansana R.
 [1996] *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Font J.M. and Rius M.
 [2000] An abstract algebraic logic approach to tetravalent modal logics // *The Journal of Symbolic logic*, 65(2): 481-518.
- Font J.M. and Hájek P.
 [2002] On Łukasiewicz's four-valued modal logic // *Studia Logica*, 70 (2): 157-182.
- Font J.M., Jansana R. and Pigozzi D.
 [2003] A survey of abstract logic // *Studia Logica* (Special Issue on Abstract Algebraic Logic, Part II), 74: 13-97.
- Font J.M., Gil A., Torrens A. and Verdú V.
 [2006] On the infinite-valued Łukasiewicz logic preserving degrees of truth // *Archive for Mathematical Logic*, 45: 839-868.

- Gabbay D.V. and Dejongh D.H.J.
 [1974] A sequence of decidable finitely axiomatizable intermediate logics with the disjunction property // The Journal of Symbolic Logic, 39: 67-78.
- Gabbay D.V. and de Queiroz R.J.G.B.
 [1992] Extending the Curry-Howard interpretation to linear, relevant and other resource logics // The Journal of Symbolic Logic, 57(4): 1319-1365.
- Gabriel G.
 [1984] Fregean connection: Bedeutung, value and truth-value // The Philosophical Quarterly, 34: 372-376.
- Gehrke M., Walker C. and Walker E.
 [1996] Some comments on interval-valued fuzzy sets // International Journal of Intell. Systems, 11: 751-759.
- Georgescu G. and Iorgulescu A.
 [1999] Pseudo-MV algebras: a non-commutative extension of MV algebras // Proceedings of the 4th International Symposium on Economic Informatics, Bucharest, 961-969.
- Georgescu G.
 [2006] N -valued logics and Łukasiewicz-Moisil algebras // Axiomathes, 16(1-2): 123-136.
- Gil A. J., Torrens A. and Verdú V.
 [1997] On Gentzen systems associated with the finite linear MV -algebras // Journal of Logic and Computation, 7 (4): 473-500.
- Giles R.
 [1976] Łukasiewicz logic and fuzzy set theory // International Journal of Man-machine Studies, 8(3): 313-327.
 [1977] A non-classical logic for physics // [Wójcicki and G. Malinowski (eds.), 1977], 13-51.
- Ginsberg M.L.
 [1986] Multivalued logics // Proc. AAAI-86. 5th National Conference on Artificial Intelligence, 243-247. Morgan kaufmann Publishers, 243-247.
 [1988] Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence // Computational Intelligence, 4(3): 256-316.
- Ginsler J.A. and Butler J.T.
 [1979] Multiple-valued logic: 1970-1978. Survey and analysis // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 9th. Bath (England), 1-13.
- Girard J.Y.
 [1987] Linear logic // Theoretical computer science, 50: 1-102.
- Goddard L. and Routley R.
 [1973] The logic of significance and context. Edinburgh and London.

Gödel K.

- [1932] Zum intuitionistischen Aussgenkalkül // Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, 69: 65-66. (Английский перевод: On the intuitionistic propositional calculus // [Gödel 1986: 222-225]).
- [1933] Eine Interpretation des intuitionistischen Aussgenkalküls // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 4: 39-40. (Английский перевод: An interpretation of the intuitionistic sentential logic // [Gödel 1986: 300-301]).
- [1986] Collected Works. Ed. in chief S. Feferman. N.Y.: Oxford Univ. Press. Vol. 1.

Goguen J.A.

- [1967] *L*-fuzzy sets // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18: 145-174.

Goldberg H., Leblanc H. and Weaver G.

- [1974] A strong completeness theorem for 3-valued logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, 15: 325-330.

Goldfarb W.D.

- [1979] Logic in the twenties: the nature of the quantifier // The Journal of Symbolic Logic, 44(3): 351-368.

Goodman N.D.

- [1981] The logic of contradiction // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 119-126.

Gottwald S.

- [1989] Mehrwertige Logik. Eine Einführung in Theorie und Anwendungen. Berlin: Akademie-Verlag.
- [1993] Fuzzy Sets and Fuzzy Logics. Braunschweig: Vieweg.
- [2001] A Treatise on Many-Valued Logics. Baldock: Research Studies Press.
- [2004] Many-valued logic // Stanford Encyclopedia of Philosophy (online).
- [2007] Many-valued logic // D. Jacquette (ed.). Philosophy of Logic. Dordrecht: Elsevier, 675-722.

Gottwald S. and Hajek P.

- [2005] Triangular norm-based mathematical fuzzy logics // [Klement and Mesiar (eds.), 2005], 275-300.

Grigolia R.

- [1977] Algebraic analysis of Łukasiewicz-Tarski's n -valued logical systems // [Wójcicki and Malinowski (eds.), 1977], 81-92.

Grzegorczyk A.

- [1964] A philosophically plausible interpretation of intuitionistic logic // Indagationes Mathematicae, 26: 569-601.
- [1967] Some relational systems and the associated topological spaces // Fundamenta Mathematicae, 60: 223-231, 1967.

- Haack S.
 [1974] *Deviant Logic – Some Philosophical Issues*. Cambridge University Press.
 [1996] *Deviant Logic, Fuzzy logic: Beyond the Formalism*. University of Chicago.
- Hacking I.
 [1963] What is strict implication? // *The Journal of Symbolic Logic*, 28(1): 51-71.
- Hähnle R.
 [1993] *Automated Deduction in Multiple-Valued Logics*. International Series of Monograph on Computer Science, Vol. 10. Oxford University Press.
 [1994] Many-valued logics and mixed integer programming // *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 12: 231-264.
 [2001] Advanced many-valued logics // D.M. Gabbay and F. Guenther (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd ed. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 297-395.
- Hähnle R and Escalada-Imaz G.
 [1997] Deduction in many-valued logics: a survey // *Mathware & Soft Computing*, IV(2): 69-97.
- Hájek P.
 [1998] *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Dordrecht: Kluwer.
 [2002 (2006)] Why fuzzy logic? // D. Jacquette (ed.) *A Companion to Philosophical Logic*. Blackwell Publishing, 595-605.
 [2003] Observations on non-commutative fuzzy logic // *Soft Computing* 8: 28-43.
 [2006] Fuzzy logic // *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (online).
- Hájek P. and Zach R.
 [1994] Review of [Bolz and Borowik 1994] // *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 4(2): 215-220.
- Hájek P., Godo and F. Esteva.
 [1996] A complete many-valued logic with product conjunction // *Archive for Mathematical Logic*, 35: 191-208.
- Hájek P. and Cintula P.
 [2006] On theories and models in fuzzy predicate logics // *The Journal of Symbolic Logic*, 71(3): 863-880.
- Halbach V.
 [2007] Axiomatic theories of truth // *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (online).
- Halldén S.
 [1949] *The Logic of Nonsense*. Uppsala: Uppsala Universitets Arsskrift.
- Hałkowska K.
 [1989] A note on matrices for systems of nonsens-logic // *Studia Logica*, XLVIII(4): 461-464.

- Halmos P. and Givant S.
 [1998] *Logic as Algebra*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- Harrop R.
 [1958] On the existence of finite models and decision procedures for propositional calculi // *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 54, Part 1: 1-13.
 [1965] Some structure results for propositional calculi // *The Journal of Symbolic Logic*, 30: 271-292.
- Hay L.S.
 [1963] Axiomatization of the infinite valued predicate calculus // *The Journal of Symbolic Logic*, 28: 77-86.
- Hempel C. G.
 [1954] Review of [Reichenbach 1944] // *The Journal of Symbolic Logic*, 19 (3): 97-100.
- Hendry H. E.
 [1980] Functional completeness and non-Łukasiewiczian truth functions // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 21(3): 536-538.
 [1983] Minimally incomplete sets of Łukasiewiczian truth functions // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(1): 146-150.
- Hendry H. E. and Massey G.J.
 [1969] On the concepts of Sheffer functions // K. Lambert (ed.). *The Logical Way of Doing Things*. New Haven and London: Yale University Press, 179-293.
- Henkin L.
 [1960] Review of [Putnam 1957] // *The Journal of Symbolic Logic*, 25 (3): 289-291.
- Herzberger H. G.
 [1977] Tertium without plenum // *International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 7th. N.Y., 92-94.
- Heyting A.
 [1930] Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik // *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Berlin. P:42-46. (Англ. перевод в: Mancosu P. *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford, 1998).
- Hodes H.
 [1989] Three-valued logics: An introduction, lexica, and some philosophical remarks // *Annals of Pure and Applied Logic*, 43(2): 99-145.
- Hodges W.
 [2001] Elementary predicate logic // D. Gabbay and F. Guenther (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd ed, Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 1-129.

- Höhle U.
 [1979] Minkowski functionals of L-fuzzy sets // First Symposium on Policy Analysis and Information Systems. North Caroline, USA, 178-186.
 [1994] Monoidal logic // R. Kruse et al. (eds.). Fuzzy Systems in Computer Science. Braunschweig: Vieweg, 233-234.
- Hoo C.S.
 [1988] A survey of *BCK* and *BCI*-algebras // SEA Bulletin of Mathematics, 12(1): 1-9.
 [1990] *MV*- and *BCK*-algebras and some applications // Algebraic structures and number theory. N.Y., 148-164.
- Hooker C.A. (ed.)
 [1975] The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics. Vol. I: Historical Evolution. Dordrecht: Reidel.
- Horn A.
 [1962] The separation theorem of intuitionist propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic, 27(4): 391-399.
 [1969] Logic with truth-values in linearly ordered Heyting algebra // The Journal of Symbolic Logic, 34: 395-408.
- Hosoi T.
 [1966] The separable axiomatization of the intermediate propositional systems of Gödel // Proceedings of Japan Academy, 42: 1001-1006.
 [1969] On intermediate logics II // Journal Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. I, 16: 1-12.
- Hosoi T. and Ono H.
 [1973] Intermediate propositional logics (a survey) // J. Tsuda College, 5: 67-82.
- Hulanicki A. and Swierckowski S.
 [1960] Number of algebras with a given set of elements // Bull. Acad. Polon., Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys, 8: 283-284.
- Hunter A.
 [1998] Paraconsistent logics // D.V. Gabbay and Ph. Smith (eds.). Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems. Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 11-36.
- Hurst S.L.
 [1984] Multiple-valued logic: its status and its future // IEEE Trans. on Computers. December, 1160-1179.
 [1986] A survey: developments in optoelectronics and its applicability to multiple-valued logic // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 16th. Blackburg, 179-188.
 [1988] Two decades of multiple-valued logic: An invited tutorial // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 18th. Palma de Malla, 164-175.

- Iburki K, Naemura K. and Nosaki A.
 [1963] General theory of complete sets of logical functions // IECE of Japan, 46.
- Imai Y. and Iséki K.
 [1966] On axiom systems of propositional calculi XIY // Proceedins of Japan Academy, 42: 19-22.
- Iorgulescu A.
 [2007] On BCK algebras – Part I.a: An attempt to treat unitarily the algebras of logic. New algebras // Journal of Universal Computer Science, 13(11): 1628-1654.
- Iséki K.
 [1966] An algebra related with a propositional calculus // Proc. Japan Acad. Ser A, Math. Sci., 42: 26-29.
- Iséki K. and Tanaka S.
 [1978] An introduction to the theory of BCK-algebras // Mathematica Japonica, 23(1): 1-26.
- Iturrioz L.
 [1976] Les algéebres de Heyting-Brouwer et de Łukasiewicz trivalente // Notre Dame Journal of Formal Logic, 17(1): 119-126.
 [1977a] An axiom system for three-valued Łukasiewicz propositional calculus // Notre Dame Journal of Formal Logic, 18(4): 616-620.
 [1977b] Łukasiewicz and symmetrical Heyting algebras // Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik, 23: 131-136.
 [1983] Symmetrical Heyting algebras with operators // Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik, 29: 33-70.
 [2000 (ed.)] COST Action 5: Many-valued logics for computer science applications – Final report. EUR 19204. Office for Official Publications of the European Communities, Luxembourg.
- Iturrioz L., Orlowska E. and Turunen E. (eds.)
 [2000] Atlas of Many-Valued Structures. Mathematical Peport 75. Tampere University of Tecnology, Department of Information Technology, Tampere, Finland.
- Jansana R.
 [2006] Propositional consequence relations and algebraic logic // Stanford Encyclopedia of Philosophy (online).
- Jaśkowski S.
 [1936] Recherches sur le système de la logique intuitioniste // Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique. Paris, 6: 58-61. (Английский перевод: Investigations into the system of intuitionist logic // Studia logica, 34: 117-120. 1975).
 [1948a] Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych // Studia Societatis Scientiarum Torunensis, Sectio A, 5: 57-77 (Анлийски перевод: A propositional calculus for inconsistent deductive systems // Studia Logica, 24: 143-157. 1967).

- [1948b] Trois contributions au calcul des propositions bivalentes // *Studia societatis scientiarum torunensis*, Section A, 1(1): 1-15. (Английский перевод: Three contribution to the two-valued propositional calculus // *Studia Logica*, 34(2): 121-132. 1975).
- Jenej S. and Montagna F.
 [2002] A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic *MTL* // *Studia Logica*, 70(2): 183-192.
- Johansson I.
 [1936] Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // *Compositio Mathematicae*, 4: 119-136.
- Jónsson B. and Tarski A.
 [1951] Boolean algebras with operators. I // *American Journal of Mathematics*, 73: 891-939.
- Jordan Z.
 [1945] The development of mathematical logic and of logical positivism in Poland between the two wars. Oxford. (Частично переиздана в: *Polish Logic: 1920-1939*. Oxford, 1967, 346-397).
- Kalicki J.
 [1950] Note on truth-table // *The Journal of Symbolic Logic*, 15(3): 174-181.
 [1952] A test for the equality of truth-table // *The Journal of Symbolic Logic*, 17(3): 161-163.
- Kalman J.A.
 [1958] Lattice with involution // *Transactions of American Mathematical Society*, 87: 485-491.
- Kandel A. and Yager R.R.
 [1979] A 1979 bibliography on fuzzy sets, their applications, and related topics // M.M.Gupta et al. (eds.). *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland, 621-744.
- Kanger S.
 [1955] A note on partial postulate sets for propositional logic // *Theoria*, 21: 99-104.
- Karnik N.N. and Mendel J.M.
 [1998] Introduction to type-2 fuzzy logic systems // *Proc. 1998 IEEE FUZZ Conference*, 915-920.
- Karnik N.N., Mendel J.M. and Liang Q.
 [1999] Type-2 fuzzy logic systems // *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 7: 643-658.
- Karpenko A.S.
 [1979] The T-F-interpretation of some n -valued logics // 6th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Hannover. Abstracts. Section 5, 98-102.
 [1983] Factor-semantics for n -valued logics // *Studia Logica*, 42(2/3), 179-185.

- [1987] Logic as truth-value // 8th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science. Moscow, 17 -22 August, 1987. Section 5, 263-265.
- [1988] T-F-sequence and their sets as truth-values // *Intensional Logic, History of Philosophy and Methodology*. Budapest, 109-119.
- [1989] Characterization of prime numbers in Łukasiewicz's logical matrix // *Studia Logica*, 48(4): 465-478.
- [1994] Sheffer's stroke for prime numbers // *Bulletin of the Section of Logic*, 23: 126-129.
- [1996a] A logic without fixed points // *Philosophical Logic and Logical Philosophy. Essays in Honour of Vladimir A. Smirnov*. Dordrecht: Reidel, 213-219.
- [1996b] The class of precomplete Łukasiewicz's many-valued logics and the law of prime number generation // *Bulletin of the Section of Logic*, 25(1): 52-57.
- [1998] A maximal lattice of implicational logics // *Bulletin of the Section of Logic*, 27: 29-32.
- [2000a] The classification of propositional calculi // *Studia Logica*, 66(2): 253-271.
- [2000b] A maximal paraconsistent logic: The combination of two three-valued isomorphs of classical propositional logic // *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Baldock: Research Studies Press, 181-187.
- [2000c] Three-valued paraconsistent logics // *Multiple-Valued Logic*, 5: 117-123.
- [2002] Atomic and molecular paraconsistent logics // *Logique et Analyse*, 45 (177-178): 31-37.
- [2006] Łukasiewicz Logics and Primes Numbers. Beckington: Luniver Press.
- [2008] Modern study in philosophical logic: Worldwide level and Russian science // *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 14(27): 35-71.

Karpenko A.S. and Popov V.M.

- [1997] *BCKX* is the axiomatization of implicational fragment of Łukasiewicz's infinite-valued logic L_{∞} // *Bulletin of the Section of Logic*, 26(3): 112-17

Kashima R. and Kamide N.

- [1999] Substructural implicational logics including the relevant logic *E* // *Studia Logica*, 63: 181-212.

Kifer M. and Lozinskii E.L.

- [1992] A logic for reasoning with inconsistency // *Journal of Automated Reasoning*, 9(2): 179-215.

Kirk R.E.

- [1979] Some classes of Kripke frames characteristic for the intuitionistic logic // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 25(5): 409-410.

- Kirkerud B.
[1982] Undefinedness in assertion languages. Preprint 74. University of Oslo.
- Kleene S.C.
[1938] On a notation for ordinal numbers // The Journal of Symbolic Logic, 3: 150-155.
- Klement E.P., Mesiar R. and Pap E.
[2000] Triangular Norms. Dordrecht: Kluwer.
- Klement E.P. and Mesiar R. (eds.)
[2005] Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms. Elsevier.
- Klir G.J. and Yuan B.
[1995] Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice-Hall (expanded version in 2007).
- Komori Y.
[1978] The separation theorem of the \aleph_0 -valued Łukasiewicz propositional logics // Rep. Fac. Sci., Hizuoka Univ., 12: 1-5.
[1981] Super-Łukasiewicz propositional logics // Nagoya Mathematical Journal, 84: 119-133.
- Koslov A.
[1992] A Structuralist Theory of Logic. Cambridge University Press.
- Kotas J. and da Costa N.C.A.
[1978] On the problem of Jaskowski and the logics of Łukasiewicz // Mathematical Logic: Proceedings of the First Brazilian Conference. N.Y., 127-139.
[1980] Some problems on logical matrices and valorizations // Proceedings of the Third Brazilian Conference on Mathematical Logic. São Paulo, 131-146.
- Kripke S.
[1965] Kripke S.A. Semantical analysis of intuitionistic logic I // J.N. Crossley and M.A. Dummett (eds.). Formal Systems and Recursive Functions. Amsterdam: North-Holland, 92-129.
[1975] Outline of a theory of truth // Journal of Philosophy, 72: 690-716. (Перепиздано в: R.L. Martin (ed.). Recent Essays on Truth and the Liar Paradox. Oxford and New York: Oxford University Press, 1984).
- Krolikowski S.J.
[1979] Łukasiewicz's twin possibility functors // Notre Dame Journal of Formal Logic, 20: 458-460.
- Kruse R., Gebhardt J. and Klawonn F.
[1994] Foundations of Fuzzy System. Chichester: Wiley.
- Krzystek P. S. and Zachorowski S.
[1977] Łukasiewicz logics have not the interpolation property // Reports on Mathematical Logic, 9: 39-40.

Lakshrnanan L.V.S. and Sadri F.

- [1994] Probabilistic deductive database // Proceedings of 1994 International Logic Programming Symposium. MIT Press, 254-268.

Lau D.

- [1982] Submaximale Klassen von P_3 // J. Inf. Process. Cybern. EIK, 18(4/5): 227-243.
[1986] Ein Kriterium für den Nachweis der Abzählbarkeit gewisser Teilverbände des Verbandes der abgeschlossenen Mengen von Funktionen der k -wertigen Logik // Math. Kolloq., 30: 11-18.
[2006] Function Algebras on Finite Sets: A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin: Springer-Verlag.

Lee S.C. and Ajabnoor Y.M.

- [1978] Digital calculus // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 8th. Rosemont, 128-141.

Lemmon E.J.

- [1966] Algebraic semantics for modal logic (I and II) // The Journal of Symbolic Logic, 31: 46-65 and 191-218 (Русский перевод: Алгебраическая семантика для модальных логик. I и II // Семантика модальных и интенциональных логик. М.: Прогресс, 1981, 98-124 и 125-165).

Leustean I.

- [2006] Non-commutative Łukasiewicz propositional logic // Arch. Math. Logic, 45: 191-213.

Lewin R.A., Mikenberg I.F. and Schwarze M.G.

- [1990] Algebraization of paraconsistent logic P^1 // The Journal of Non-Classical Logic, 7(2): 45-154.
[1991] C_1 is not algebraizable // Notre Dame Journal of Formal Logic, 32(4): 609-611.

Lewis C. I.

- [1912] Implication and the algebra of logic // Mind, 21: 522-531.
[1918] A Survey of Symbolic Logic. University of California Press, Berkeley.

Lewis C.I. and Langford C.H.

- [1932] Symbolic Logic. N.Y.: Appleton-Century-Crofts (2nd ed. with corrections, Dover, 1959).

Lindström P.

- [1969] On extensions of elementary logic // Theoria, 35: 1-11.

Lo Czu Kai.

- [1963] Precompleteness of a set and rings of linear functions // Acta sc. nature Univ. J, Jilinensis, 2.

Loparić A.

- [1986] A semantical study of some propositional calculi // The Journal of Non-Classical Logic, 3: 73-95.

Loparić A. and da Costa C.A.

- [1984] Paraconsistency, paracompleteness and valuations // *Logique et Analyse*, 106: 119-131.
- [1986] Paraconsistency, paracompleteness and induction // *Logique et Analyse*, 113: 73-80.

Łoś J.

- [1949] O matrycach logicznych. Prace Wrocławskiego Towarzystwa naukowego. Ser. B. Vol 19. University of Wrocław (Английский перевод в: Ulrich D.E. Matrices for sentential calculci. Ph. D. diss. Wayne State University, 1967).

Łoś J. and Suszko R.

- [1958] Remarks on sentential logics // *Indagationes Mathematicae*, 20: 177-183.

Łukasiewicz J.

- [1918] Farewell lecture by proffessor Jan Łukasiewicz, delivered in the Warsaw University Lecture Hall on March 7, 1918 // [Łukasiewicz J. 1970], 84-86.
- [1920] O logice trójwartościowej // *Ruch Filozoficzny*, 5: 170-171. (Английский перевод: On three-valued logic // [Łukasiewicz 1970], 87-88).
- [1921] Logika dwuwartościowa // *Przegląd Filozoficzny*, 13: 189-205. (Английский перевод: Two-valued logic // [Łukasiewicz 1970], 89-109).
- [1922/1923] Interpretacja liczbowa teorii zdań // *Ruch Filozoficzny*, 7: 92-93. (Английский перевод: A numerical interpretation of theory of propositions // [Łukasiewicz 1970], 129-130).
- [1929] Elementy logiki matematycznej. Warszawa. (Английский перевод: Elements of mathematical logic. N.Y., 1963).
- [1930] Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls // *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, III(23): 51-77. (Английский перевод: Philosophical remarks on many-valued systems of propositional logic // [Łukasiewicz 1970], 153-178).
- [1941] Die Logik und das Grundlagenproblem // *Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques* 6-9, 12. Zürich. P.82-100. (Английский перевод: Logic and the problem of the foundations of mathematics // [Łukasiewicz 1970], 278-294).
- [1953] A system of modal logic // *The Journal of Computing Systems*, 1: 111-149. (Переиздано в: [Łukasiewicz 1970], 352-390)).
- [1970] Selected Works. Amsterdam & Warszawa: North-Holland & PWN.

Łukasiewicz J. and Tarski A.

- [1930] Untersuchungen über den Aussagenkalkul // *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, III

(23): 1-21. (Английский перевод: Investigations into the sentential calculus // [Łukasiewicz 1970], 131-152).

Lukyanowskaya K.

[2003] Intermediate regular Kleene's three-valued logics // Смирновские чтения. 4 Международная конференция. М.: ИФРАН, 82-83.

Maduch M.

[1978] On three-valued implicative systems // *Studia logica*, XXXVII(4): 351-385.

Maksimova L. and Vakarelov D.

[1974a] Representation theorem for generalized post algebras of order ω^+ // *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 22: 757-764.

[1974b] Semantics for ω^+ -valued predicate calculi // *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 22: 765-771.

Malinowski G.

[1977] Classical characterization of n -valued Łukasiewicz calculi // *Reports on Mathematical Logic*, 9: 41-45.

[1990] Q -consequents operation // *Reports on Mathematical Logic*, 24: 49-59.

[1993] *Many-Valued Logics*. Oxford: The Clarendon Press.

[1994] Inferential many-valuedness // J. Woleński (ed.). *Philosophical Logic in Poland*. Dordrecht: Kluwer, 75-84.

[1997] Many-valuedness, sentential identity, inference and Łukasiewicz modalities // *Logical Trianguli*, 1: 59-71.

[2002] Many-valued logic // D. Jacquette (ed.). *A Companion to Philosophical Logic*. New York: Blackwell Publishes, 545-562.

[2004] Inferential intensionality // *Studia Logica*, 76(1): 3-16, 2004.

[2006] *Logiki Wielowartościowe*. Warszawa: PWN.

Mamdani E.N. and Sembi B.S.

[1979] On the nature of implication in fuzzy logic // *International Symposium on Multiple-Valued Logic*. 9th. N.Y., 143-151.

Mangani P.

[1973] On certain algebras related to many-valued logics (Italian) // *Boll.U.M.I.* (4), 8: 68-78.

Marcos J.

[2005] On a problem of da Costa // *Essays on the Foundations of Mathematics and logic*. Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy.

[2009] What is a non-truth-functional logic? // *Studia Logica*, 92(2): 215-240.

Mares E.D.

[2005] Four-valued semantics for relevant logic R // *Journal of Philosophical Logic*, 33: 327-341.

Marra V. and Mundici D.

- [2003] Łukasiewicz logic and Chang's MV-algebras in action // V.F. Hendricks and J. Malinowski (eds.). Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica. Dordrecht: Kluwer, 145–192.

Martin J.N.

- [1975] A syntactic characterization of Kleene's strong connectives with two designated values // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 21: 181–184.

Martin N.M.

- [1954] The Sheffer function of 3-valued logic // The Journal of Symbolic Logic, 19: 45–51.

Martin R.L. and Woodruff P.W.

- [1975] On representing 'true-in-L' in L // Philosophia, 5: 213–217.

Martinez N.G.

- [1990] The Priestly duality for Wajsberg algebras // Studia Logica, 49(1): 31–46.

Massey G.

- [1972] The modal structure of the Prior-Rescher family of infinite product system // Notre Dame Journal of Formal Logic, 13(2): 219–223.

Maudlin T.

- [2004] Truth and Paradox: Solving the Riddles. Oxford University Press, USA.

McArthur R.P.

- [1977] Three-valued free tense logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, 18(1): 101–106.

McCall S. and Meyer R.K.

- [1966] Pure three-valued Łukasiewiczian implication // The Journal of Symbolic Logic, 31(3): 399–405.

McKay C.G.

- [1967] A note on the Jaśkowski sequences // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 13: 95–96.

McKinsey J.C.C.

- [1936] On the generation of the functions Cpq and Np of Łukasiewicz and Tarski by means of the single binary operation // Bulletin of the American Mathematical Society, 42: 849–851
[1939] Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions // The Journal of Symbolic Logic, 4(4): 155–158.

McKinsey J.C.C. and Tarski A.

- [1946] On closure elements in closure algebras // Annals of Mathematics, 47(1): 122–162.
[1948] Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting // The Journal of Symbolic Logic, 13: 1–15.

McKinsey J.C.C. and Suppes P.

- [1954] Review of [Février, 1951] // The Journal of Symbolic Logic, 19 (1): 52-54.

McNaughton R.

- [1951] A theorem about infinite valued sentential logic // The Journal of Symbolic Logic, 16: 1-13. (Русский перевод: Мак-Нотон Р. Теорема о бесконечнозначной логике высказываний // Кибернетический сборник. 1961, 3: 9-78).

McNeill D. and Freiburger P.

- [1993] Fuzzy logic: The discovery of a revolutionary computer technology and how it is changing our world. Simob and Schuster.

Mendel J.M.

- [2001] Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems. Prentice-Hall PTR.
[2007] Type-2 fuzzy sets and systems: an overview // IEEE Computational Intelligence Magazine, 2: 20-29.

Mendel J. M. and John R.I.

- [2002] Type-2 Fuzzy Sets Made Simple // IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 10: 117-127.

Mendel J. M., John R. I. and Liu F.

- [2006] Interval type-2 fuzzy logic systems made simple // IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 14: 808-821.

Mendez J.M.

- [1988] Exhaustively axiomatizing $S3_{\rightarrow}$ and $S4_{\rightarrow}$ with a select list of representative theses // Bulletin of the Section of Logic, 17(1): 15-22.

Meredith C. A.

- [1958] The dependence of an axiom of Łukasiewicz // Transactions of Amer. Math. Soc. 87: 54.

Metcalf G., Olivetti N. and Gabbay D.

- [2005] Łukasiewicz logic: from proof systems to logic programming // Logic Journal of the IGPL, 13(5): 561-585.

Meyer R.K.

- [1966] Pure denumerable Łukasiewicz implication // The Journal of Symbolic Logic, 31: 575-580.

Meyer R.K. and Parks Z.

- [1972] Independent axioms for the implicational fragment of Sobociński's three-valued logic // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 18: 291-295.

Miller D.M. and Thornton M. A.

- [2007] Multiple Valued Logic: Concepts and Representation. Morgan & Claypool Publishers.

Minari P.

- [2003] A note on Łukasiewicz's three-valued logic // *Annali del Dipartimento di Filosofia dell'Università di Firenze*, 163-190.

Miyakawa M.

- [1971] Functional completeness and structure of three-valued logic I-classification of P_3 // *Researches of Electrotechnical Laboratory*, 717: 1-85.
[1979] Enumerations of basis of three-valued logical functions // *Coll. Soc. J. Bolyai*, 28: 469-487.
[1988] Classifications and basis enumerations in many-valued logics // *Researches of Electrotechnical Laboratory*, No. 889, 1-201.
[2002] Classification of three-valued logical functions // *Multiple Valued Logic: An International Journal*, 8(4): 473-493.

Miyakawa M, Stojmenović I., Lau D. and Rosenberg I.G.

- [1987] Classifications and basis enumerations in many-valued logics // *International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 17 th. Boston, 152-160.

Miyakawa M., Rosenberg I. and Stojmenovic I.

- [1990] Classification of three-valued logical function preserving 0 // *Discrete Applied Mathematics*, 28: 231-249.

Miyama M.T.

- [1979] On the study of many-valued logics. I // *Bull. of Osaka prefect. tech. college*, 13: 47-57.
[1980] On the study of many-valued logics. II // *Ibid*, 14: 125-138.

Mizumoto M. and Tanaka K.

- [1976] Some properties of fuzzy sets of type 2 // *Information and Control*, 31(4): 312-340.

Mobasher B., Pigozzi D., Slutzki G. and Voutsadakis G.

- [2000] A duality theory for bilattices // *Algebra Universalis*, 43: 109-125.

Moisil G.C.

- [1935] Recherches sur l'algebre de la logique // *Annales Sci. Univ. Jassy. Sect. I, Math*, 22: 1-117.
[1940] Recherches sur les logiques non chrysippiennes // *Annales Sci. Univ. Jassy. Sect. I, Math*, 26: 431-466. (Переиздано в [Moisil 1972], 195-232).
[1941] Notes sur les logiques non chrysippiennes // *Ann Sci. Univ. Iassy*, 27: 86-98. (Переиздано в: [Moisil 1972], 233-243)).
[1942] Logique Modale // *Disquisitiones math. et. Phys*, II: 3-98. (Переиздано в: [Moisil 1972], 341-431)).
[1963a] Le algebre di Łukasiewicz // *Analele Univ. Bucuresti. Seria Acta Logica*, 6: 97-135.
[1963b] Les logiques non-Chrysippiennes et leurs applications // *Acta Philosophica Fennica. Fasc. XVI*: 137-152.
[1965] Incercari vechi si noi de logica neclasica. Bucarest.

- [1972] Essais sur les Logiques Nonchrysippiennes. Bucarest: De l'Academie de la Republique Socialiste de Roumanie.
- Montagna A. and Sacchetti L.
 [2003] Kripke-style semantics for many-valued logics // Mathematical Logic Quarterly, 49(6): 629-641.
- Monteiro A.
 [1963] Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalentes // Bull. Math. de la Soc. Math. et Phys. de la R. P. Roumaine. Nouvelle série, 7(55): 1-12.
 [1967] Construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole monadiques, I // Mathematica Japonica, 12: 1-23.
 [1969] Sur quelques extensions du calcul propositionnel intuitionniste // IVème Congrès des mathématiciens d'expression latine. Bucarest.
 [1980] Sur les algèbres de Heyting symétriques // Portugallae Mathematica, 39: 1-237.
- Monteiro L.
 [1963] Axiomes indépendents pour les algèbres de Łukasiewicz trivalentes // Bulletin de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la R. P. Roumanie, Nouvelle Série, 7: 199-202.
 [1970] Les algèbres de Heyting et de Łukasiewicz trivalentes // Notre Dame Journal of Formal Logic, 11: 453-466.
- Moraga C.
 [1991] A decade of spectral techniques // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 21th. Victoria, 182-188.
- Morawiec A. and Piróg-Rzepecka K.
 [1985] New results in logic of formulas which lose sense // Bulletin of the Section of Logic, 14(3): 114-119.
- More T.Jr.
 [1964] A lattice of implicational calculi // The Journal of Symbolic logic, 29(3): 159-160 (Abstract).
- Morikawa O.
 [1989] Some modal logics based on three-valued logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, 30(1): 130-137.
- Mortensen C.
 [1980] Every quotient algebra for C_1 is trivial // Notre Dame Journal of Formal logic, 21: 694-700.
 [1982] Model structures and set algebras for Sugihara matrices // Notre Dame Journal of Formal logic, 23(1): 85-90.
 [1989] Paraconsistency and C_1 // Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent. Munich: Philosophia Verlag, 289-305.
- Mostowski A.
 [1948] Proofs of non-deducibility in intuitionistic functional calculus // The Journal of Symbolic Logic, 13(4): 204-207.

- [1964] An example of a non-axiomatizable many-valued logic // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 7: 72-76.
- [1968] Models of Set Theory. (Переиздано в: Foundational studies. Selected Works. Vol. 1. Amsterdam, 1979).
- Mukaidano M.
- [1981] A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra) // International Symposium on Multiple-Valued Logic. 11th. N.Y., 27-34.
- Mundici D.
- [1986a] MV -algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK -algebras // Mathematica Japonica, 31: 889-894.
- [1986b] Interpretation of AF C^* -algebras in Łukasiewicz sentential calculus // Journal of Functional Analysis, 65: 15-63.
- [1987] Satisfiability in many-valued sentential logic is NP -complete // Theoretical Computer Science, 52: 145-153.
- [1992] The logic of Ulam's game with lies // Cambridge Studies in Probability, Induction and Decision Theory. Cambridge Univ. Press, 275-284.
- [1993] Logic of infinite quantum systems // International Journal of Theoretical Physics, 32(10): 1941-1955.
- [1994] A constructive proof of McNaughton's theorem in infinite-valued logic // The Journal of Symbolic Logic, 59(2): 596-602.
- [1996] Łukasiewicz normal forms and toric desingularizations // Logic: From Foundation to Applications. New York: Oxford Univ. Press, 401-423.
- Mundici D. and Olivetti N.
- [1998] Resolution and model building in the infinite-valued calculus of Łukasiewicz // Theoretical Computer Science, 200: 335-366.
- Muskens R.
- [1999] On partial and paraconsistent logics // Notre Dame Journal of Formal Logic, 40(3): 352-374.
- Muzio J.C. and Weselkamper T.
- [1986] Multiple-Valued Switching Theory. Bristol and Boston: Adam Hilger Ltd.
- Naish L.
- [2006] A three-valued semantics for logic programmers // Theory and Practice of Logic Programming, 6: 509-538.
- Nguyen H.T. and Walker E.
- [1999] First Course in Fuzzy Logic. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press (3rd ed., 2005).
- Nieminen J.
- [1977] On the algebraic structure of fuzzy sets of type 2 // Kybernetika, 13: 261-273.

- Nikolova M., Nikolov N., Cornelis C. and Deschrijver G.
 [2002] Survey of the research on intuitionistic fuzzy sets // *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 4(2): 127-157.
- Novák, V.
 [1989] *Fuzzy Sets and their Applications*. Bristol: Adam Hilger.
- Novak V., Perfilieva I. and Močkoř J.
 [2000] *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Dordrecht: Kluwer.
 (Имеется перевод на рус. яз.: Новак В., Перфильева И. и Мочкож И. Математические принципы нечеткой логики. М.: Физматлит, 2006).
- Ockham W.
 [1983] *Predestination, God's Foreknowledge, and Future Contingents*. 2nd ed. Indianapolis.
- Ohnishi M. and Matsumoto M.
 [1962] A system for strict implication // *Proceedings of the Symposium on the Foundation of Mathematics*, Katadu, Japan, 98-108.
- Ono H.
 [1987] Some problems in intermediate predicate logics // *Report on Mathematical Logic*, 21: 55-67.
 [1990] Structural rules and a logical hierarchy // P.P. Petkov (ed.). *Mathematical Logic*. New York: Plenum Press, 95-104.
- Ono H. and Komori Y.
 [1985] Logics without the contraction rule // *The Journal of Symbolic Logic*, 50: 169-201.
- Orłowska E.
 [1985] Mechanical proof methods for Post logics // *Logique et Analyse*, 28(110-1110): 173-192.
 [1998] Post algebras and Post logic // *Studies in Logic, Grammar and Rhetoric*, 2(15).
- Orłowska E. and Iturrioz L.
 [1999] A Kripke-style and relational semantics for logics based on Łukasiewicz algebras // Baghrāmian M. and Simons P.M. (eds.), *Łukasiewicz in Dublin: An International Conference*.
- Ostermann P.
 [1988] Many-valued modal propositional calculi // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 34: 343-354.
- Pahi B.
 [1971] Full models and restricted extensions of propositional calculi // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 17(1): 5-10.
 [1972a] A theorem on the interrelationship of axiom systems for implicational calculi // *Ibid.*, 18(2): 165-167.

- [1972b] A method for proving the nonexistence of finite characteristic models for implicational calculi // *Ibid*, 18(2): 169-172.
- Pałasińska K.
- [1992] Three-element nonfinitely axiomatizable matrices // *Bulletin of the Section of Logic*, 21(4): 147-151.
- [1994] Three-element nonfinitely axiomatizable matrices // *Studia Logica*, 53(2).
- Pałasiński M. and Wroński A.
- [1986] Eight simple questions concerning *BCK*-algebras // *Reports on Mathematical Logic*, 20: 87-91.
- Panti G.
- [1995] A geometric proof of the completeness of the calculus of Łukasiewicz // *The Journal of Symbolic Logic*, 60: 563-578.
- [1998] Multi-valued Logics // P. Smets (ed.), *Quantified Representation of Uncertainty and Imprecision*. Vol. 1. Dordrecht: Kluwer, 25-74.
- Pappinghaus P. and Wirsing M.
- [1983] Nondeterministic three-valued logic isotonic and guarded truth-functions // *Studia Logica*, 42(2/3): 1-22.
- Parks R. Z.
- [1972] A note on R-mingle and Sobociński's three-valued logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13: 227-228.
- Pavelka J.
- [1979] On fuzzy logic I, II, III // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 25: 45-52, 119-134, 447-464.
- Pearce D.
- [1999] Stable inference as intuitionistic validity // *Journal of Logic Programming*, 38: 79-91.
- Pinkawa V.
- [1981] On Sheffer functions in *k*-valued logical calculi // [Csžkary and Rosenberg (eds.)], 537-545.
- Piróg-Rzepecka K.
- [1973] A predicate calculus with formulas which lose sense and the corresponding propositional calculus // *Bulletin of the Section of Logic*, 2: 22-29.
- [1977] *Systemy nonsense-logics*. Warszawa: PWN.
- Płonka J.
- [1967] On distributive quasi-lattices // *Fundamenta Mathematicae*, 60: 191-200.
- Popov V.M.
- [1998] On the logics related to A. Arruda's system V1 // *Stanisław Jaśkowski Memorial Symposium. "Paraconsistent Logic, Logical Philosophy, Mathematics & Informatics"*. Toruń, 112-114.

Porte J.

- [1984] Łukasiewicz Ł-modal system and classical refutability // *Logique et analyse*, 27 (105): 87-92.

Post E.L.

- [1920] Determination of all closed systems of truth tables // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26: 427.
- [1921] Introduction to a general theory of elementary propositions // *American Journal of Mathematics*, 43(3): 163-185. (Переиздано в: J. van Heijenoort (ed.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge: Harvard Univ. Press, 1967, 264-283).
- [1941] Two-valued iterative systems // *Annals of Mathematical Studies*. Vol. 5. Princeton-London.

Priest G.

- [1979] The logic of paradox // *Journal of Philosophical Logic*, 8: 219-241.
- [1984a] The logic of paradox, revisited // *Ibid*, Vol. 13.
- [1984b] Hyper-contradictions // *Logique et Analyse*, 27(107): 237-243.
- [2002] Paraconsistent logic // D.M. Gabbay and F. Guenther (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd edn., Vol. 6. Dordrecht: Kluwer, 287-393.
- [2008] Many-valued modal logics: A simple approach // *The Review of Symbolic Logic*, 1: 190-2003.

Priest G., Routley R. and Norman J. (eds.).

- [1989] *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*. München: Philosophia Verlag.

Prijetelj A.

- [1996] Bounded contraction and Gentzen style formulation of Łukasiewicz logics // *Studia Logica*, 57: 437-456.

Prior A.N.

- [1953] Three-valued logic and future contingents // *The Philosophical Quarterly*, 3: 317-326.
- [1955] Many-valued and modal system: an intuitive approach // *The Philosophical Review*, 64: 626-630.
- [1957a] *Time and Modality*. Oxford: The Clarendon Press.
- [1957b] Many-valued logics: the last of three talks on «The logic game» // *The Listener*, 57: 717-719.
- [1958] The syntax of time-distinctions // *Franciscan Studies*, 18(2): 105-120.
- [1962] *Formal Logic*. Oxford University Press.
- [1967] *Past, Present and Future*. Oxford: The Clarendon Press.
- [1968] Tense logic for non-permanent existence // Prior A.N. *Papers on Time and Tense*. Oxford: The Clarendon Press, 145-160.

- Prucnal T.
[1969] Kriterium definiowalności funkcji w matrycach Łukasiewicza // *Studia Logica*, 23: 71-77.
- Putnam H.
[1957] Three-valued logic // *Philosophical Studies*, 8: 73-80.
(Перевидано в: [Hooker (ed.), 1975], 99-107).
- Pykacz J.
[1994] Fuzzy quantum logics and infinite-valued Łukasiewicz logic // *International Journal of Theoretical Physics*, 33(7): 1403-1416.
- Pynko A.P.
[1995a] On Priest's logic of paradox // *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 5: 219-225.
[1995b] Algebraic study of Sette's maximal paraconsistent logic // *Studia Logica*, 54(1): 89-128.
[1999a] Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansion // *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 9(1): 61-105.
[1999b] Definitional equivalence and algebraizability of generalized logical system // *Annals of Pure and Applied Logic*, 98: 1-68.
[2000] Subprevarieties versus extensions. Application to the logic of paradox // *The Journal of Symbolic Logic*, 65: 756-766.
- Quackenbush R.W.
[1982] A new proof of Rozenberg's primal algebra characterization theorem // *Finite Algebra and Multiple-Valued Logic*. Szeged, 603-634.
- Raju P.T.
[1954] The principle of four-cornered negation in Indian philosophy // *Review of Metaphysics*, 7: 694-713.
- Rasiowa H.
[1955] O pewnym fragmencie implikacyjnego rachunku zdań. // *Studia Logica*, 3: 208-226.
[1973] On generalized Post algebras of order ω^+ and ω^+ -valued predicate calculi // *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Mathématiques, Astronomiques et Physiques*, 21: 209-219.
[1974a] *An Algebraic Approach to Non-classical Logics*. Amsterdam: North-Holland.
[1974b] Post algebras as a semantic foundation of m-valued logic // *Studies in mathematics*, 9: 92-142.
[1977] Many-valued algorithmic logic as a tool to investigate programs // [Epstein and Dunn (eds.), 1977], 79-102.
- Rauszer C.
[1974] Semi-Boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations // *Fundamenta Mathematica*, 83: 219-249.

- [1977] Applications of Kripke models to Heyting-Brouwer Logic // *Studia Logica*, 36: 61-71.
- [1980] An algebraic and Kripke-style approach to a certain extension of intuitionistic logic // *Dissertationes Mathematicae*, Vol. CLXVII. Warszawa.
- Rautenberg W.
- [1979] *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Braunschweig.
- [1981] 2-Element matrices // *Studia Logica*, 40: 315-353.
- Ray R.
- [1979] Are truth-values objects? // *Philosophical Studies*, 35: 199-211.
- Reichenbach H.
- [1944] *Philosophical foundation of quantum mechanics*. Berkeley, Los Angeles.
- [1951] Über die erkenntnistheoretische Problemlage und den Gebrauch einer dreiwertigen Logik in Quantenmechanik // *Zeitschrift für Naturforschung*, 6a: 569-575.
- Reischer C. and Simovici D.
- [1987] A functional characterization of Post algebras // *ISMVL*. 17th, Boston/Mass. IEEE Computer Soc., New York, 8-13.
- Rescher N.
- [1962] Quasi-truth functional systems of propositional logic // *The Journal of Symbolic Logic*, 27: 1-10.
- [1965] On intuitive interpretation of systems of four-valued logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 6(2): 154-156.
- [1969] *Many-Valued Logic*. New York: McGraw Hill. (Reprinted in 1993).
- Rescher N. and Urquhart A.
- [1971] *Temporal logic*. Wien – N.Y.: Springer-Verlag.
- Restall G.
- [1993] How to be *really* contraction free // *Studia Logica*, 52: 381-391.
- [1995] Four-valued semantics for relevant logics (and some their rivals) // *Journal of Philosophical Logic*, 24(2): 139-160.
- [2000] *An Introduction to Substructural Logics*. London and New York: Routledge.
- Reznik E. and Curmin P.
- [2001] Intuitionistic sequent calculi for finitely many-valued logics // *Journal of IGPL*, 9: 793-812.
- Rine D.C.
- [1974] Review of [Urquhart 1973] // *Mathematical Review*, 47(2): 274-275.
- [1977 (ed.)] *Computer Science and Multiple-Valued Logic: Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp.
- [1984 (ed.)] *Computer Science and Multiple-Valued Logic: Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. Revised ed.

Robinson T.T.

- [1968] Independence of two nice sets of axioms for the propositional calculus // The Journal of Symbolic Logic, 33(2): 265-270.

Rodríguez A.F.

- [1980] Un estudio algebraico de los Cálculos Proposicionales de Łukasiewicz. Ph. Doc. Diss. University of Barcelona.

Romanowska A. and Traczyk T.

- [1980] On commutative BCK-algebras // Mathematica Japonica, 25: 567-583.

Rose A.

- [1952] Eight-valued geometry // Proceeding London Math. Soc., Ser. 3, 2: 30-44.
- [1953] Propositional calculus and realizability // Transactions American Mathematical Society, 75: 1-19.
- [1953a] The degree of completeness of the \aleph_0 -valued Łukasiewicz propositional calculus // Journal of London Math. Soc, 28: 176-184.
- [1953b] A formalization of Sobociński's three-valued implicational propositional calculus // The Journal of Computing Systems, 2: 165-168.
- [1956] Formalization du calcul propositionnel implicatif à \aleph_0 -valeurs de Łukasiewicz // Comptes rendud hebdomadaires des seance de l'Academie des Sciences, 243: 1183-1185.
- [1968] Binary generators for the m -valued and \aleph_0 -valued Łukasiewicz propositional calculi // Composito Mathematica, 20: 153-169. (Переиздано в: Logic and Foundation of Mathematics. Groniugen, 1968).
- [1969] Some many-valued propositional calculi without single generators // Zeitschrift für mathematische Logic und Grundlagen der Mathematik, 15: 105-106.
- [1981] Many-valued logics // E. Agazzi (ed.). Modern Logic – A Survey: Historical, Philosophical, and Mathematical Aspects. Dordrecht: Reidel, 113-129.

Rose A. and Rosser J.B.

- [1958] Fragments of many-valued statement calculi // Transaction of the American Mathematical Society, 87: 1-53.

Rosenberg I.

- [1965] La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble finite // Comptes Rendus de l'Academ. Sci. Paris. Groupe 1, 260: 3817-3819.
- [1970] Über die funktionale Vollständigkeit in der mehrwertigen Logiken // Rosprawy Československé Akademie věd. Rada matematických a přírodních věd. Praha. Ročník 80, 4: 3-93.
- [1973] The number of maximal closed classes in the set of functions over a finite domain // Journal of Combinatorial Theory, 14: 1-7.

- [1974] Completeness, closed classes and relations in multiple-valued logics // International Symposium on Multiple-Valued Logic, 14 th. Morgantown, 1-26.
- [1977] Completeness properties of multiple-valued logic algebras // [Rine (ed.), 1977], 144-186.
- [1978] On generating large classes of Sheffer functions // Aequationes Mathematicae, Basel, 17: 164-181.
- [1984] Completeness properties of multiple-valued logic algebras // [Rine (ed.), 1984], 150-192.

Rosenbloom P.C.

- [1942] Post algebras I. Postulates and general theory // American Journal of Mathematics, 64: 167-188.

Rosser J.B.

- [1960] Axiomatization of infinite valued logics // Logique et Analyse, 3: 137-153.
- [1969] Simplified Independence Proofs: Boolean Valued Models of Set Theory. New York: Academic Press.

Rosser J.B. and Turquette A.R.

- [1945] Axiom schemes for m -valued propositional calculi // The Journal of Symbolic Logic, 10: 61-82.
- [1950] A note on the deductive completeness of m -valued propositional calculi // The Journal of Symbolic Logic, 14: 219-225.
- [1952] Many-valued logics. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. (Reprinted in 1958).

Rousseau G.

- [1967a] Completeness in finite algebras with a single operation // Proceedings of American Mathematical Society, Vol. 18. P.1009-1013.
- [1967b] Sequents in many-valued logic I // Fundamenta Mathematicae, 60: 23-33. (Erratum: Fundamenta Mathematicae, 1967-68, 61: 313).
- [1969] Logical systems with finitely many truth-values // Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 17: 189-194.
- [1970a] Sequents in many-valued logic II // Fundamenta Mathematicae, 67: 125-131.
- [1970b] Post algebras and pseudo-Post algebras // Fundamenta Mathematicae, 67: 133-145.

Routley R. and Meyer K.

- [1976] Every sentential logic has a two-valued worlds semantics // Logique et Analyse, 19: 345-365.

Routley R.

- [1984] American plan completed: alternative classical-style semantics, without stars, for relevant and paraconsistent logics // Studia Logica, 43(1-2): 131-158.

- Rozonoer L.I.
 [1989] On interpretation of inconsistent theories // Information Sciences, 47: 243-266.
- Salomaa A.
 [1962] Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I, II // Turun Yliopiston Julkaisu Annales Universitatis Turkuensis, A53: 1-9; A63: 1-19. (Русский перевод: Саломая А. Некоторые критерии полноты для множества функций многозначной логики // Кибернетический сборник. 1964, 8: 7-32).
 [1963] Some analogues of Sheffer functions in infinite-valued logics // Acta Philosophica Fennica, 16: 227-235.
- Saloni Z.
 [1972] Gentzen rules for the m -valued logic // Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Mathématiques, Astronomiques et Physiques, 20: 819-826.
- Sankappanavar H.P.
 [1985] Heyting algebras with dual pseudocomplementation // Pacific Journal of Mathematics, 117(2): 405-415.
- Sasao T.
 [1999] Switching Theory for Logic Synthesis. Dordrecht: Kluwer
- Scarpellini B.
 [1962] Die Nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Łukasiewicz // The Journal of Symbolic logic, 27(2): 159-170.
- Schofield P.
 [1969] Independent conditions for completeness of finite algebras with a single generator // Journal of London Math. Soc., 44: 413-423.
- Schotch P.K., Jensen J.B., Larsen P.F. and Maclellan E.J.
 [1978] A note on three-valued modal logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, 14: 63-68.
- Schröter K.
 [1955] Methoden zur Axiomatisierung beliebiger Aussagen- und Prädikatenkalküle // Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 1: 241-251.
- Schumann A.
 [2007] Non-Archimedean Valued Predicate Logic // Bulletin of the Section of Logic, 36(1-2): 67-78.
 [2008] A novel tendency in philosophical logic // Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, 14 (27): 73-100.
- Schütte K.
 [1960] Beweistheorie. Berlin, Springer-Verlag.

Schweizer B. and Sklar A.

- [1960] Statistical metric spaces // Pacific Journal of Mathematics, 10: 313-334.

Scott D.

- [1973] Models for various type-free calculi // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Vol. IV. Amsterdam: North-Holland, 157-187.
[1974] Completeness and axiomatizability in many-valued logics // L. Henkin et al. (eds.). Proceedings of the Tarski Symposium. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 25. Providence: AMS, 411-435.
[1976] Does many-valued logic have any use? // S. Körner (ed.). Philosophy of Logic. Berkeley: Univ. of California Press, 64-74.

Scroggs S.J.

- [1951] Extensions of the Lewis system S5 // The Journal of Symbolic Logic, 16: 112-120.

Seeskin K.R.

- [1971] Many-valued logic and future contingencies // Logique et Analyse, 14: 759-773.

Seegerberg K.

- [1965] A contribution to nonsense-logic // Theoria, 31: 199-217.
[1967] Some modal logics based on a three-valued logic // Theoria, 33: 53-71.

Sengupta G.

- [1984] On identifying relevance with truth value // Analysis, 43(3): 72-74.

Sette A.M.

- [1973] On propositional calculus P_1 // Mathematica Japonica, 18: 173-180.

Sette A.M. and Alves E.H.

- [1996] On the equivalence between some systems of non-classical logic // Bulletin of the Section of Logic, 25(2): 68-72.

Sette A.M. and Carnielli W.A.

- [1995] Maximal weakly-intuitionistic logics // Studia Logica, 55: 181-203.

Shramko Y., Dunn J.M. and Takenaka T.

- [2001] The trilattice of constructive truth values // Journal of Logic and Computation, 11, 761-788.

Shramko Y. and Wansing H.

- [2005] Some useful 16-valued logics: how a computer network should think // Journal of Philosophical Logic, 34: 121-153.
[2007] Entailment relations and/as truth values // Bulletin of the Section of Logic, 36: 131-143.

- [2009] Editorial introductions. Truth values: Part I // *Studia Logica*, 91(3): 295-304.
- Sicoe C. O.
[1967] A characterization of Łukasiewicz algebras // *Proceedings of Japan Academy*, 43(8): 729-736.
- Sinott-Armstrong W. and Malhotra A.
[2002] How to avoid deviance (in logic) // *History and Philosophy of Logic*, 23 (3): 215-236.
- Skala H. J.
[1978] On many-valued logics, fuzzy sets, fuzzy logic and their applications // *Fuzzy Sets and Systems*, 1: 293-311.
- Skvortsov D.
[2005] On the predicate logic of linear Kripke frames and some of its extension // *Studia logica*, 81(2): 283-292.
- Skyrms B.
[1970] Return of the Liar: three-valued logic and the concept of truth // *American Philosophical Quarterly*, 7: 153-161.
- Slaney J. K.
[1989] On the structure of de Morgan monoids with corollaries on relevant logics and theories // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 30(1): 117-129.
[1991] The implications of paraconsistency // *Proceedings of IJCAI-91*, 2: 1052-1057.
[1993] SCOTT: A model-guided theorem prover // *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence*.
- Slaney J. and Meglicki G.
[1991] MaGIC (Matrix Generator for Implication Connectives). Version 2.0. Notes and Guide. Technical report TR-ARP-1/91. Automated Reasoning Project, Australian National University, Canberra.
- Slaney J. K. and Bunder M. W.
[1994] Classical versions of BCI, BCK and BCIW logics // *Bulletin of the Section of Logic*, 23(2): 61-65.
- Słupecki J.
[1936] Der volle dreiwertige Aussagenkalkül // *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, III (29): 9-11. (Английский перевод: The full three-valued propositional calculus // S. McCall (ed.). *Polish Logic: 1920 – 1939*. Oxford: The Clarendon Press, 1967, 335-337).
[1939a] Kryterium pełności wielowartościowych systemów logiki zdań // *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, III(32): 102-109. (Английский перевод: A criterion of fullness of many-valued systems of propositional logic // *Studia Logica*. 1972, 30: 153-157).
[1939b] Dowód aksjomatyzowalności pełnych systemów wielowartościowych rachunku zdań // *Comptes Rendus des Séances de la*

Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, III(32): 110-128.
(Английский перевод: Proof of axiomatizability of full many-valued systems of calculus of propositions // Studia Logica. 1971, 29: 155-168).

Słupecki J., Bryll J. and Prucnal T.

[1967] Some remarks on the three-valued logic of J.Łukasiewicz // Studia Logica, 21: 45-70.

Smiley T.

[1961] On Łukasiewicz's Ł-modal system // Notre Dame Journal of Formal Logic, 2: 149-153.

[1976] Comment on [Scott 1976] // S. Körner (ed.). Philosophy of Logic. Berkeley: Univ. of California Press., 74-88.

Smith K.C.

[1988] Multiple-valued logic: A tutorial and appreciation // Computer. April, 17-27.

Smullyan R.M.

[1968] First Order Logic. Berlin: Springer.

Soames S.

[1998] Understanding Truth. New York: Oxford University Press.

Sobociński B.

[1936] Aksjomatyzacja pewnych wielowartościowych systemów teorii dedukcji // Roczniki prac naukowych zrzeczenia asystentów Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego w Warszawie, 1. Wydział matematyczno-przyrodniczy, 1: 399-419.

[1952] Axiomatization of a partial system of three-valued calculus of propositions // The Journal of Computing Systems, 1: 23-55.

[1964] Modal system S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic, 5(4): 305-312.

[1964] Family K of the non-Lewis modal systems // Notre Dame Journal of Formal Logic, 5(4): 313-318.

[1970] Certain extensions of modal system S4 // Notre Dame Journal of Formal Logic, XI(3): 347-367, 1970.

Solovay R.M.

[1976] Provability interpretations of modal logic // Israel Journal of Mathematics, 25: 287-304.

Sonobe O.

[1975] A Gentzen-type formulation of some intermediate propositional logics // J.-Tsuda-College, 7: 7-13, 1975.

Stachniak Z.

[1996] Resolution Proof Systems: an Algebraic Theory. Dordrecht: Kluwer.

Stojmenović I.

- [1984] Classification of P_3 and the enumeration of bases of P_3 // Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, 14(1): 73-80.
- [1987] Some combinatorial and algorithmic problems in many-valued logics. University of Novi Sad, 1-150.
- [1989] On Sheffer symmetric functions in three-valued logic // Discrete Applied Mathematics, 22: 267-274.

Stone M.H.

- [1936] The theory of representations for Boolean algebras // Transactions of the American Mathematical Society, 40: 37-111.

Strawson P.F.

- [1950] On referring // Mind, 59: 320-344.

Suchon W.

- [1974] Definition des foncteurs modaux de Moisil dans le calcul n-valent des propositions Łukasiewicz avec implication et négation // Reports on Mathematical Logic, 2: 43-47.

Sugihara T.

- [1955] Strict implication free from implicational paradoxes // Memoirs of the Faculty of Liberal Arts. Fukui University. Series I, 55-59.

Surma S.J.

- [1971] Jaskowski's matrix criterion for the intuitionistic propositional calculus // Prace z Logiki, 6: 21-54.
- [1974] An algorithm for axiomatizing every finite logic // International Symposium on Multiple-valued Logic. 4th. Morgantown, 315-321. (Перепечатано в: [Rine 1977 (ed.)], 137-143).

Suszko R.

- [1975] Remarks on Łukasiewicz's three-valued logics // Bulletin of the Section of Logic, 4(3): 87-90.
- [1977] The Fregean axiom and Polish mathematical logic in the 1920's // Studia Logica, 36(4): 377-380.

Sutara S.

- [1982] Sentences and truth-values // Logical form, predication and ontology. Delhi, 197-208.

Swirydowicz K.

- [2008] There exist an uncountable set of pretabular extensions of the relevant logic R and each logic of this set is generated by a variety of finite height // The Journal of Symbolic Logic, 73(4): 1249-1270.

Takahashi M.

- [1967] Many-valued logics of extended Gentzen style I // Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A 9, 95-116.
- [1970] Many-valued logics of extended Gentzen style II // The Journal of Symbolic Logic, 35(4): 493-528.

Takagi N., Nakashima K. and Mukaidono M.

- [1999] Explicit Representation of many-valued Łukasiewicz logic functions // Multiple Valued Logic. An International Journal, 4: 249-266.

Takamura H.

- [2004] Semisimplicity, amalgamation property and finite embeddability property of residuated lattices. Ph.D. Thesis. Japan Advanced Institute of Science and Technology.

Takeuti G. and Titani S.

- [1984] Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic fuzzy set theory // The Journal of Symbolic Logic, 49(3): 851-866.

Tanaka S.

- [1967] On axiom systems of propositional calculi // Proceedings of the Japan Academy, 43(3): 192-193.
[1975] On \wedge -commutative algebras // Math. Seminar Notes Kobe Univ., 3: 59-64.

Tardos G.

- [1986] A maximal clone of monotone operations which is not finitely generated // Order, 3: 211-218.

Tarski A.

- [1930a] Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik // Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, III, 23: 22-29. (Английский перевод: On some fundamental concepts of metamathematics // [Tarski 1956], 30-37).
[1930b] Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I // Monatshefte für Mathematik und Physik, 37: 361-404. (Английский перевод: Fundamental concepts of the methodology of the deductive sciences // [Tarski 1956], 60-109).
[1936] Über die Erweiterungen der unvollständigen Systeme des Aussagenkalküls. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 7: 51-57. (Английский перевод: On extensions of incomplete systems of sentential calculus // [Tarski 1956], 393-400).
[1956] Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938. Oxford: The Clarendon Press (2nd ed. Indianapolis, 1983).
[1983] On the concept of logical consequence // Tarski A. Logic, Semantics, Metamathematics. Indianapolis: Hackett 2nd ed., 409-420.

Thomas I.

- [1962a] On the infinitary of positive logic // Notre Dame Journal of Formal Logic, 3(3): 108-109.
[1962b] Finite limitations on Dummett's *LC* // Notre Dame Journal of Formal Logic, 3(3): 170-174.

Thomason S.K.

- [1978] Possible worlds and many truth values // *Studia Logica*, 37(2): 195-204.

Tokarz M.

- [1974a] A method of axiomatization of Łukasiewicz logics // *Studia Logica*. Vol. 33. P.333-338. (Переиздано в Wójcicki R., Malinowski G. (eds.) [1977]. P.113-118).
- [1974b] Invariant systems of Łukasiewicz calculi // *ZMLGM*, 20: 221-228.
- [1977] Degrees of completeness of Łukasiewicz logics // [Wójcicki and Malinowski (eds.) 1977], 127-134.
- [1980] *Essays in Matrix Semantics of Relevant Logics*. Warszawa: Institute of Philosophy and Sociology of the Polish Academy of Sciences.

Törnebohm H.

- [1957] On two logical systems proposed in the philosophy of quantum mechanics // *Theoria*, 23: 81-101.

Torrens A.

- [1988] On the role of the polynomial $(x \rightarrow y) \rightarrow y$ in some implicative algebras // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 34: 117-122.

Traczyk T.

- [1962] On axioms and some properties of Post algebras // *Bull. Ac. Pol. Sc. Cl. III* 10: 509-512.
- [1963] Axioms and some properties of Post algebras // *Colloquium Math.*, 10: 198-209.
- [1964] An equational definition of a class of Post algebras // *Bull. Ac. Pol. Sc. Cl. III*, 12: 147-149.
- [1979] On the variety of bounded commutative *BCK*-algebras // *Mathematica Japonica*, 24: 283-292.

Trillas E. and Valverde L.

- [1981] On some functionally expressible implications for fuzzy set theory // *Proceedings of the 3rd International Seminar on Fuzzy Set Theory*. Linz, 173-190.

Tsuji M.

- [1998] Many-valued logics and Suszko's thesis revisited // *Studia Logica*, 60(2): 299-309.

Turing A.

- [1937] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem // *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, 42: 230-265.

Turquette A.R.

- [1963] Independent axioms for infinite-valued logic // *The Journal of Symbolic Logic*, 28(3): 217-221.

- [1966] A method for constructing implication logics // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 12: 267-278.
 - [1969] Generalizable Kleene logics // *Proceedings of American Mathematical Society*, 20(2): 361-367.
- Turunen E.
- [1999] *Mathematics Behind Fuzzy Logic*. Berlin: Physica Verlag.
- Tuziak R.
- [1988] An axiomatization of the finite-valued Łukasiewicz calculus // *Studia Logica*, 47 (1): 49-55.
 - [1997] Finitely many-valued paraconsistent systems // *Logic and Logical Philosophy*, 5: 121-127.
- Ulrich D.
- [1989] The nonexistence of finite characteristic matrices for subsystems of R_1 // *Directions in relevant logic*. Dordrecht. P.177-178.
 - [1990] An integer-valued matrix characteristic for implicational $S5$ // *Bulletin of the Section of Logic*, 19(3): 87-91.
 - [1994] On the independence of B from I , C , W , K'_1 , and Karpenko's formula X // *Bulletin of the Section of Logic*, 23(3): 96-97.
- Umezawa T.
- [1959] On intermediate propositional logics // *The Journal of Symbolic Logic*, 24: 20-36, 1959.
- Urbas I.
- [1996] Dual-intuitionistic logic // *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(3): 440-451
- Urquhart A.
- [1973] An interpretation of many-valued logic // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 19: 111-114.
 - [1984] The undecidability of entailment and relevant implication // *The Journal of Symbolic Logic*, 49: 1059-1073.
 - [1986] Many-valued logic // D. Gabbay and F. Guentner (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. III: Alternatives in Classical Logic. Dordrecht: Reidel, 71-116.
 - [1993] Failure of interpolation in relevant logics // *Journal of Philosophical Logic*, 22: 449-479.
 - [2001] Basic many-valued logic // D. Gabbay and F. Guentner (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*. 2nd edn., Vol. 2. Dordrecht: Kluwer, 249-295.
- Van Benthem J. A. F. K.
- [1984] Correspondence theory // D. Gabbay and F. Guentner (eds.). *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. II: Extensions of Classical Logic. Dordrecht: Reidel, 167-247.

Van Dallen D.

- [2002] Intuitionistic logic // D. Gabbay and F. Guentner (eds.), Handbook of Philosophical Logic. 2nd ed. Vol. 5. Dordrecht: Kluwer, 1-114.

Van Fraassen B.

- [1966] Singular terms, truth-value gaps, and free logic // The Journal of Philosophy, 65: 136-152.

Van Pelt M.

- [2008] Fuzzy Logic Applied to Daily Life. Seattle, WA.

Varlet J.

- [1968] Algèbres de Łukasiewicz trivalentes // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 38: 462-469.
[1969] Considérations sur les algèbres de Łukasiewicz trivalentes // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 36: 281-290.

Vasyukov V.L.

- [1993] The completeness of the factor semantics for the Łukasiewicz's infinite-valued logics // Studia Logica, 52: 143-167.

Vetterlein T.

- [2008] A way to interpret Łukasiewicz logic and Basic logic // Studia Logica, 90(3): 407-423.

Visser A.

- [1982] On the completeness principle: a study of provability in Heyting's Arithmetic // Annals of Mathematical Logic, 22: 263-295.
[1984] Four-valued semantics and the liar // Journal of Philosophical Logic, 13(2): 181-217.

Wajsberg M.

- [1931] Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań // Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, III(23): 126-145. (Английский перевод: Axiomatization of the three-valued calculus // [Wajsberg 1977], 12-29).
[1935] Beiträge zum Metaaussagenkalkül I // Monatshefte für Mathematik und Physik, 42: 221-242. (Английский перевод: Contributions to meta-calculus of propositions I // [Wajsberg 1977], 89-106)).
[1937] Metalogische Beiträge // Wiadomości Matematyczne, 43: 131-168. (Английский перевод: Contribution to metalogic // [Wajsberg 1977], 172-200).
[1938] Untersuchungen über den Aussagenkalkül von A. Heyting // Wiadomości Matematyczne, 46: 45-101 (Русский перевод: Исследования по исчислению высказываний А.Гейтинга // Методологические исследования. Тбилиси, 1985, 78-128).
[1977] Logical Works. Wrocław: OSSOLINEUM.

Walker C.L. and Walker E.A.

- [2005] The algebra of fuzzy truth values // Fuzzy Sets and Systems, 149: 309-347.

- [2006] T-norms for type-2 fuzzy sets // 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Vancouver, 1235-1239.
- [2008] The algebra of truth values of type-2 fuzzy sets: A survey // Nuyh V.-N. *et al.* (eds.) *Interval/Probabilistic Uncertainty*. Berlin: Springer.
- Wang Hao
- [1961] The calculus of partial predicates and its extension to set theory // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 7: 177-198.
- Wang X., Da Ruan and Kerre E.E.
- [2009] *Mathematics of Fuzziness – Basic Issues*. Berlin: Springer.
- Wansing H. and Shramko Y.
- [2008] Suszko's Thesis, inferential many-valuedness and the notion of a logical system // *Studia Logica*, 88: 405-429. (*Erratum* in volume 89: 147. 2008)
- Webb D.L.
- [1935] The generation of any n -valued logic by one binary operation // *Proc. of the National Academy of Science*, 21: 252-254.
- [1936] Definition of Post's Generalized Negative and Maximum in terms of one binary operation // *American Journal of Mathematics*, 42: 193-194.
- Wheeler R.F.
- [1961] Complete propositional connectives // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 7: 185-198.
- Whitehead A.N. and Russell B.
- [1910-1913] *Principia Mathematica*. 3 vols. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1910, 1912, 1913. 2nd ed., 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2,3). Abridged as *Principia Mathematica to *56*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1962 (2nd ed., 1997).
- Williamson J.
- [1976] The complete axiomatization of any many-valued propositional logic // *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 22: 299-306.
- Wójcicki R.
- [1969] Logical matrices strongly adequate for structural sentential calculi // *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Classe 3, XVII*: 333-335.
- [1973] Matrix approach in the methodology of sentential calculi // *Studia Logica*, 32: 7-37.
- [1988] *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequences Operations*. Dordrecht: Reidel.
- Wójcicki R. and Malinowski G. (eds.)
- [1977] *Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calculi*. Wrocław: OSSOLINEUM. Bibliogr.: pp.189-199.

- Wojtylak P.
[1984] An example of a finite though nonfinitely axiomatizable matrix // Report on Mathematical Logic, 17: 39-46.
- Wolf R.G.
[1977] A survey of many-valued logics (1966-1974) // [Epstein and Dunn (eds.), 1977], 167-323.
- Woodruff P.W.
[1974] A modal interpretation of three-valued logic // Journal of Philosophical Logic, 3(4): 433-440.
[1984] Paradox, truth and logic. Part 1: Paradox and truth // Journal of Philosophical Logic, 13: 213-232.
- Wozniakowska B.
[1978] Algebraic proof of the separation theorem for the infinite-valued logic of Łukasiewicz // Reports on Mathematical Logic, 10: 129-137.
- Wright G.H., von.
[1984] Truth and logic // Wright G.H., von. Philosophical papers. Vol. III: Truth, Knowledge and Modality. Oxford: Basil Blackwell.
[1987] Truth-logics // Logique et Analyse (N.S.), 30(120): 311-334.
- Wroński A.
[1974] On the cardinalities of matrices strongly adequate for the intuitionistic propositional logic // Reports on mathematical logic, 3: 67-72.
[1983] BCK-algebras do not form a variety // Mathematica Japonica, 28: 211-213.
[1987] Remarks on a survey article on many valued logic by A.Urquhart // Studia Logica, 46(3): 275-278.
- Yutani H.
[1977] On a system of axioms of a commutative BCK-algebras // Math. Seminar Notes Kobe Univ, 5: 255-256.
- Zadeh L. A.
[1965] Fuzzy sets // Information and Control, 8: 338-353.
[1975] The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning // Information Sciences, 8: 199-249.
[1994] Preface // R.L. Marks-II (ed.). Fuzzy Logic Technology and Applications. IEEE Technical Activities Board.
[2000] Foreword // [Dubois and Prade (eds.), 2000].
- Zaitsev D.
[2009] A few more useful 8-valued logics for reasoning with tetralattice EIGHT4 // Studia Logica, 92(2): 265-280.
- Zakharyashev M., Wolter F. and Chagrov A.
[2001] Advanced modal logic // D. Gabbay and F. Guenther (eds.). Handbook of Philosophical Logic. 2nd edn. Volume 3. Dordrecht: Kluwer, 83-266.

Zawirski Z.

- [1934] Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa // Prace Komisji Filozoficznej Polskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk, 4: 155-240.

Zeman J.J.

- [1971] A study of some systems in the neighborhood of S4.4 // Notre Dame Journal of Formal Logic, XII(3): 341-357, 1971.

Zimmermann H.-J.

- [1991] Fuzzy Set Theory and its Applications. Dordrecht: Kluwer (4th ed. in 2001).

Zygmunt Y.

- [1984] An essay in matrix semantics for consequence relations // Acta Universitatis Wratislaviensis. No. 741, Wrocław.

Именной указатель

- Аншаков О.М. 5, 33, 44, 82, 91,
147, 166-167-168, 173-176,
206, 266, 273, 280, 282,
343-345
Аристотель 4, 13-14, 36-37, 39,
134
- Бахтияров К.И. 134
Батыршин И.З. 283
Белнап Н. 69, 142, 144, 152,
299, 318
Бернайс П. 34, 87
Биркгоф Г. 103
Блохина Г.Н. 192
Бочвар Д.А. 4, 10, 46, 50, 52-53,
55, 57, 82, 116, 132, 196,
208-209
Брауэр Л.Э.Я. 227, 256
Брусенцов Н.П. 9
Буль Г. 13, 103
- Ванзинг Г. 152, 294, 319
Василенко О.Н. 215
Васильев Н.А. 39
Васюков В.Л. 235
Верещагин Н.К. 231
Верхозина М.И. 338
Виноградов Д.В. 156
Владимиров Д.А. 103
Войшвилло Е.К. 157
Волгин Л.И. 262
Воленский Я. 40
Вригт Г.Х., фон. 38, 147-148
- Гаврилов Г.П. 10, 185, 195, 262
Гейтинг А. 4, 228
Гёдель К. 29, 244
Генцен Г. 221, 228
Гильберт 29, 31, 34, 325
- Гиндикин С. Г. 10, 17, 186, 192,
194
Гливенко В.И. 228
Горбунов И.А. 243
Голдблатт Р. 320
Гретцер Г. 99, 101, 105
- Григолия Р.Ш. 82, 105, 118,
125, 132, 166-167, 247, 280,
345
Гришин В.Н. 140, 221
Гудстейн Р.Л. 128
- Данн М. 299
Девяткин Л.Ю. 10, 54-55
Дементрович Я. 261
Дли М.И. 283
Донченко В.В. 249
Драгалин А.Г. 229, 231
- Емельянов Н.Р. 186
Ермолаева Н.М. 5, 138, 140-141,
145-146, 159, 345
- Жегалкин И.И. 16
- Забежайло М.И. 167, 280, 345
Заде Л. 269, 274, 276, 282, 284
Зайцев Д.В. 145
Захарова Е.Ю. 1936 195
Зиновьев А. А. 7, 9-10, 80, 295
Знаменская Н.А. 50, 60, 67, 73
- Ивин А.А. 138
Ивлев Ю.А. 303
Ишмуратов А.Т. 56, 255, 265
- Кангер С. 230
Карпенко И.А. 254

Карри Х. 104
Кейслер Г.Дж. 30
Клини С.К. 4, 19, 28, 48, 58-59,
64
Колмогоров А.Н. 228, 256
Комендантская Е.Ю. 63, 65-66
Комендантский В.Е. 54, 166,
336
Кон П. 90, 194
Кофман А. 269, 273
Крипке С.А. 137, 230, 251
Круглов В.В. 283
Кудрявцев В.Б. 10, 181-182,
185, 193-195, 198, 261
Кузнецов А.В. 17, 78, 128, 182,
190-193, 200, 203, 230, 232,
243, 244, 303, 344

Левин В.И. 262
Линденбаум А. 92, 163, 218
Лукаевич Я. 4, 38, 40, 80, 87,
95, 135-136, 159, 270, 299
Лупанов О.Б. 186

Мак-Колл Х. 39
Мак-Кинси Дж. 245
Максимова Л.Л. 244, 247, 251
Мальцев А.И. 29, 130, 133, 184,
193
Марков А.А. 49
Мартынюк В.В. 194
Марченков С.С. 17, 182,
184-185, 192, 195, 201, 207,
261
Мейер Р. 251-252, 254
Мендельсон Э. 15, 23, 30, 35
Мереди К.А. 330
Меськов В.С. 80
Месхи В.Ю. 140-141
Милль Д.С. 33
Минц Г.Е. 244, 340
Михеева Е.А. 201
Монтейро А. 237

Мучник А.А. 5, 138, 140-141,
145-146, 159, 200-201, 345

Налимов В.В. 269
Набебин А.А. 195
Новиков П.С. 229

Орлов И.Е. 250

Павлов С.А. 147
Пильчак Б.Ю. 98
Пирс Ч.С. 39, 87, 296
Плиско В.Е. 229
Попов В.М. 4, 10, 55, 71-73, 77,
149, 157, 165, 250-251,
254-255, 311, 337-338
Поспелов Д.А. 282
Пост Э. 87, 182
Прайор А.Н. 216, 230-239
Пынько А.П. 156

Расёва Е. 104, 107-108, 228, 319
Рассел Б. 127, 297
Раца М.Ф. 49, 112, 202-204
Розоноэр Л.И. 70
Роутлей Р. 251
Рыбаков В.В. 247
Рыбаков М.Н. 121, 243
Рычков С.В. 5, 44, 91, 147, 166,
168, 173, 176, 206, 343-344

Санджайя 134
Сапоженко А.А. 10
Сикорский Р. 104, 107-108, 228,
319
Скотт Д. 366-305
Скулем Т. 104, 221
Слупецкий Е. 47
Смайли Т.Дж. 141
Сметанич Я.С. 49
Смирнов В. А. 3, 20, 39, 234,
250, 266, 324, 329, 344
Солощенко А.А. 72

- Сушко Р. 305
 Тарский А. 3, 18, 46, 107, 158, 247
 Токаж М. 117
 Томова Н.Е. 4, 10, 66-68, 72, 84, 86, 112, 297, 345
 Тюркетт А. 60

 Уайтхед А. 127, 297
 Угольников А.Б. 185
 Уркварт А. 305

 Финн В.К. 6, 10, 33, 45, 51, 55, 57, 65, 81-2, 112-113, 116, 132, 156, 166-167, 182, 196, 205, 208-210, 273, 280, 297, 345
 Фреге Г. 22, 296-297

 Хавьер Санчес П. 160
 Хаханян В.Х. 229
 Хенкин Л. 108
 Хинтиikka Я. 230
 Хомич В.И. 122
 Хризипп 38

 Чёрч А. 21, 33, 35, 296-297, 332
 Чэн Ч.Ч. 30

 Шалак В.И. 10, 210, 214-215, 280
 Шейнфинкель М.И. 325
 Шень А. 231
 Шестаков В.И. 47, 78-79, 81-82, 196
 Шестопал Г.А. 184, 198
 Шехтман В.Б. 232
 Шкатов Д.П. 265
 Шрамко Я.В. 145, 152, 294, 296-297, 319
 Энгелер Э. 325
 Эсакиа Л.Л. 104-105, 247

 Юрьев Д.Н. 81

 Яблонский С.В. 140, 181-182, 185-186, 189-193, 195, 198, 200, 202, 261
 Ягер Р. 282
 Яглом И.М. 102-103
 Янков В.А. 49, 232, 243
 Янов Ю.И. 200
 Яхьяева Г.Я. 282

 Abad M. 112
 Ackerman R. 7, 115
 Aczel P. 262
 Aglianò P. 289
 Aguzzoli S. 120, 209, 219, 220
 Ajabnoor Y. M. 130
 Akama S. 264
 Alves E.H. 75, 77, 259
 Ambas O. 175
 Anderson A.R. 71, 141-142, 240, 248-249, 252, 254, 328, 340-341
 Andréka H. 108
 Anshakov O.M. 33, 175
 Åqvist L. 47
 Arieli O. 133, 153-155
 Arruda A.I. 76-77, 257
 Asenjo F.G. 69-70
 Atanassov K. 278-279
 Avelone A. 234
 Avron A. 43, 61, 70, 72, 82, 133, 150, 153-155, 165, 234, 252-254, 302, 338

 Baaz M. 3, 120, 165-166, 230, 234, 238, 257, 265
 Baczynski M. 283
 Baghramian M. 10
 Balbes R. 101, 125
 Barringer H. 44, 82
 Bartels F. 263
 Barton S. 188
 Barwise J. 296
 Batens D. 70-71, 74, 256, 305
 Battilotti G. 344

Beavers G. 219, 244, 247, 318
 Bechio D. 111
 Bell J.C. 33
 Bellman R.E. 276, 279
 Belluce L.P. 221
 Belnap N.D. 71, 135, 141-142,
 240, 248-249, 251-252, 254,
 328; 340-341
 Bendova K. 61
 Ben-Jacob M. 81
 Bergmann M. 8
 Berman J. 185
 Bernays P. 35
 Béziau J.-Y. 8, 255, 258,
 295-296, 300, 302, 305
 Białynicki-Birula A. 144
 Bigaj T. 80
 Bimbó K. 133
 Birkhoff G. 79
 Blamey S. 152
 Blau U. 44
 Blok W.J. 108-110, 175, 244,
 247, 255
 Blyth T.S. 104
 Bocheński J.M.
 Bochman A. 160
 Boicescu V. 125
 Bolc L. 8, 49, 132, 295
 Borowik P. 8, 49, 132, 295
 Bosbach B. 225
 Brady R.T. 71, 148-149, 154, 253
 Brouwer L.E.J. 227
 Brown D.J. 92, 303
 Brunner A.B.M. 266
 Bryl J. 43, 47
 Bueno O.A.S. 295, 300, 305
 Buff H.W. 225
 Bulatov A. 201, 204
 Bull R.A. 242, 245, 247, 264, 265
 Bunder M.W. 325, 335, 337
 Burris S. 90, 94, 103, 302-303
 Butler J.T. 8-9
 Butler S.W. 9
 Byrd S.W. 310

Caferra R. 265
 Cain J. 62
 Caleiro C. 260, 301
 Carnielli W.A. 74, 77, 113, 120,
 157, 165, 255, 257, 260, 263,
 266, 301, 305
 Castillo O. 282
 Cattaneo G. 222, 236-237
 Caton C.E. 298
 Chagrov A. 232, 242, 246-248,
 265
 Chang C.C. 30, 125, 218,
 221-222, 226, 262, 3186 320
 Cheng J.H. 44, 82
 Church A. 31, 80, 330
 Ciabattoni A. 120, 219
 Cignoli R. 9, 50, 67, 112, 123-
 127, 129, 204, 222-223, 226,
 289
 Cintula P. 289, 292, 344
 Ciucci D. 236-237
 Clay R.E. 116
 Cleave J. 61
 Coniglio M. 133, 157, 263, 301,
 305
 Cornelis C. 278-279
 Correia F. 264
 Corsi G. 234
 Craig W. 252
 Csžkary B. 186
 Curmin P. 265
 Curry H. 137, 325, 329
 Czelakowski J. 109
 Czermak J. 266
 Da Costa N.C.A. 70, 73, 75-77,
 80, 133, 256, 258-259, 295,
 300, 305
 Dahn B. 305
 Dalla Chiara M.L. 237
 Damnjanovic Z. 62
 D'Antona O.M. 209
 Da Ruan 269
 De Amo S. 74

- De Baets B. 293
 Delahaye J.P. 81
 Demetrovics J. 201
 De Queiroz R.J.G.B. 326
 Deschrijver G. 278
 Dienes P. 81
 Dilworth R.P. 287
 Di Nola A. 120, 221, 225
 Doming X. 217
 D'Ottaviano I.M.L. 9, 70, 73-74, 226
 Dubois D. 269, 279, 283-284, 286
 Dugundji J. 244
 Dumitriu A. 8
 Dummett M. 231, 233, 243, 321
 Dunn J.M. 92, 103, 133, 141-142, 152, 244, 248-253, 318, 319
 Dwinger Ph. 101, 125, 130
 Dyckhoff A. 234
 Dyrda K. 334
 Dziobiak W. 176, 255

 Ebbinghaus H.-D. 57
 Elkan C. 284
 Epstein G. 9, 130, 261, 322
 Epstein R.L. 8, 46, 60, 74
 Ernst Z. 339
 Escalada-Imaz G. 166
 Esteva F. 287, 289, 291-293
 Evans T. 116

 Feferman S. 30
 Fenstad J.E. 221
 Fermüller C.G. 3, 120, 165-166, 265
 Fernández V.L. 133, 157
 Ferrari M. 234
 Ferreirim I.M.A. 289
 Février P.-D. 80
 Feys R. 134, 325
 Fidel M. 257
 Figalla A. 112
 Filipoi A. 125
 Fine K. 243

 Finn V.K. 33, 57, 82, 112, 133, 175, 196, 205, 209
 Fitting M. 9, 62-63, 66, 81, 145, 151-152, 161, 230-231, 246
 Fodor J. 283, 293
 Font J.M. 92, 109-110, 138, 145-146, 223, 253, 301-305, 344
 Fraassen B., van. 33, 79
 Freiburger P. 269
 Frieder G. 9

 Gabbay D.V. 219, 255, 263, 326
 Gabriel G. 296
 de Gallego M.S. 126
 Gebhardt J. 269
 Gehrke M. 278, 293
 Georgescu G. 125, 221, 226
 Gerla B. 220
 Gil A.J. 120, 305
 Giles R. 220, 273
 Ginsberg M.L. 150-151
 Ginser J. A. 8
 Giuntini R. 237
 Givant S. 110
 Gödel K. 29, 48, 121, 228-229, 241
 Godo L. 287, 289, 291-293
 Goddard L. 82
 Goguen J.A. 272, 278
 Goldberg H. 41
 Goldfarb W.D. 29
 Goodman N.D. 266
 Gonçalves R. 260
 Gottwald S. 3, 8, 10, 36, 44, 115, 145, 164, 166, 221, 230, 265, 269, 279, 285, 292-293, 295
 Gouveia P. 263
 Grigolia R. 57, 82, 112, 118, 133, 222
 Grzegorczyk A. 230-231, 243
 Guillaume M. 258

 Haack S. 9, 83, 138

- Hacking I. 340
 Hähnle R. 8-9, 120, 165-166, 219,
 265, 269, 284, 288, 292, 294
 Hájek P. 8-9, 138, 220, 226, 234,
 237, 279, 284-285, 287-288,
 289, 291-292, 293, 344
 Halbach V. 158, 160
 Halldén S. 57
 Hałkowska K. 72
 Halmos P. 108, 110
 Hannak L. 201
 Hardegree G. 92, 103
 Harrop R. 98, 251
 Hay L.S. 221
 Hempel C.G. 80
 Hendry H.E. 196, 200, 210
 Henkin L. 80
 Herzberger H.G. 196
 Heyting A. 48, 228
 Hodes H. 79, 83
 Hodges W. 23, 30
 Höhle U. 286, 292
 Hoo C.S. 224-225
 Hooker C.A. 80
 Horn A. 233, 321-323
 Hosoi T. 122, 232
 Hulanicki A. 201
 Hunter A. 259
 Hurst S.L. 9

 Iburki K. 202
 Iorgulescu A. 224, 226
 Iséki K. 224-225
 Iturrioz L. 105, 111, 123-125, 265

 Janowith M.F. 104
 Jansana R. 93, 108, 110, 344
 Jaśkowski S. 48, 68, 70, 93, 96,
 229, 333
 Jayaram B. 283
 Jenej S. 292
 Jensen J.B. 265
 Johansson I. 256
 John R.I. 278, 282

 Jones C.B. 44, 82
 Jónsson B. 245
 Jordan Z. 295

 Kacprzyk J. 279
 Kalman J.A. 101
 Kalicki J. 55
 Kalman J. A.
 Kamide N. 341
 Kandel A. 269
 Kanger S. 34
 Karnik N.N. 277, 283
 Kashima R. 341
 Keisler H.J. 30, 2626 320
 Kerre E.E. 269, 279
 Kifer M. 155
 Kirk R.E. 98
 Kirkerud B. 81
 Klawonn F. 269
 Kleene S.C. 58
 Klement E.P. 285
 Klir G.J. 269, 283
 Komori Y. 42, 223, 247, 292,
 318, 338
 König M. 237
 Konikowska B. 234
 Koslov A. 146
 Kotas J. 76, 133, 305
 Krause D. 80, 305
 Kripke S. 62, 81, 160, 230
 Krolkowski S.J. 136
 Kruse R. 269
 Krzystek P.S. 252

 Lakshminanan L.V.S. 152
 Langford C.H. 134, 241, 250
 Larsen P.F. 265
 Lau D. 182, 184-185, 195,
 202-204, 205, 303
 Leblanc H. 41
 Lee S.C. 130
 Lemmon E. 137-138, 243, 245
 Lettieri A. 226
 Leustean I. 226

- Lev I. 302
 Lewin R.A. 113, 260
 Lewis C.I. 134, 241, 250
 Liang Q. 283
 Lima-Marques M. 157
 Lindström P. 29
 Liu F. 278
 Lo Czu Kai 194
 Lombardo F. 222
 Loparić A. 77, 259
 Łoś J. 55, 90, 92
 Lozinskii E.L. 155
 Luchi D. 219
 Łukasiewicz J. 22, 35, 40, 43, 46,
 87, 91, 114-115, 117, 135, 163,
 217-218, 307, 323, 326, 328,
 330
 Lukyanowskaya K. 64

 Maclellan E.J. 265
 Maduch M. 81
 Maksimova L. 261
 Malhotra A. 83
 Malinowski G. 8, 55, 87, 90, 127,
 136, 301, 303, 305
 Mamdani E.N. 283
 Mangani P. 221
 Marcos J. 74, 76-77, 257, 301,
 305
 Mares E.D. 252
 Marra V. 209, 226
 Martin J.N. 60
 Martin N.M. 198
 Martin R.L. 160
 Martinez N.G. 226
 Martins M. 260
 Massey G. 200, 243
 Matsumoto M. 252
 Maudlin T. 81
 McCall S. 252
 McKinsey J.C.C. 78, 89, 190,
 199, 230, 242
 McNaughton R. 117, 219, 235,
 262

 McNeill D. 269
 Meglicki G. 338
 Melin P. 282
 Mendel J.M. 277-278, 282, 283
 Mendelsohn R.L. 246
 Mendez J.M. 340
 Meredith C.A. 218
 Mesiar R. 285
 Metcalfe G. 219
 Meyer R.K. 244, 251, 253, 255,
 305, 334, 337
 Miglioli F. 234
 Mikenberg I.F. 113, 260
 Miller D.M. 9
 Minari P. 47
 Miyakawa M. 202-203
 Miyama M.T. 8
 Mizumoto M. 276, 279-280
 Mobasher B. 151
 Mockor J. 285
 Moisil G.C. 47, 50, 67, 101,
 110-111, 123-124
 Monk J.D. 103
 Montagna A. 305
 Montagna F. 289, 292
 Monteiro A. 43, 49, 67, 105,
 110, 112
 Monteiro L. 111-112, 146, 204
 Moraga C. 9
 Morawiec A. 57
 More T.Jr. 330
 Morikawa O. 265
 Mortensen C. 75-76, 113, 253,
 260
 Mostowski A. 168, 221, 319
 Mukaidano M. 117, 272
 Mundici D. 9, 219-220, 222-223,
 225-226
 Muskens R. 155
 Muzio J.C. 9

 Naemura K. 202
 Nagata Y. 264
 Naish L. 81

Nakashima K. 117
 Németi I. 108
 Nguyen H.T. 269
 Neumann J., von 79
 Nieminen J. 277
 Nikolov N. 278
 Nikolova M. 278
 Noguera C. 344
 Norman J. 255
 Nosaki A. 202
 Nowak M. 269, 285

 Ockham W. 38
 Ohnishi M. 252
 Olivetti N. 219
 Ono H. 42, 232, 292, 344
 Orłowska E. 9, 131-132, 265
 Ostermann P. 265

 Pahi B. 339
 Pałasińska K. 177
 Panti G. 8, 223
 Pap E. 285
 Pappinghaus P. 319
 Parks Z. 254-255, 337
 Pavelka J. 287, 293
 Pearce D. 234
 Péres G.R. 253
 Perfilieva I. 285
 Perry J. 296
 Pigozzi D. 108-110, 151, 175,
 344
 Pinkawa V. 198
 Piróg-Rzepecka K. 56-57
 Płonka J. 100
 Popov V.M. 76, 338
 Porte J. 138
 Post E.L. 22, 127, 182, 185,
 191-192, 200, 308
 Prade H. 269, 279, 283-284, 286
 Priest G. 69, 255, 259, 265, 319
 Preining N. 234
 Prijatelj A. 120, 219

Prior A.N. 46, 138, 243, 264, 298,
 308, 330-332
 Prucnal T. 43, 47
 Putnam H. 80
 Pykacz J. 220
 Pynko A.P. 70, 113, 145, 149,
 155-156, 159

 Quackenbush R.W. 195

 Raftery J.G. 255
 Raju P.T. 134
 Rasiowa H. 81, 96, 101, 108,
 131-132, 144, 261, 315, 343
 Rauszer C. 105, 237, 267
 Rautenberg W. 176
 Ray R. 296
 Rebagliato J. 110
 Reichenbach H. 80
 Reischer C. 130
 Rescher N. 8-9, 39, 44, 49, 54,
 60, 87, 96, 97, 132, 217, 240,
 265, 298, 303, 314
 Restall G. 149, 248, 251, 261, 319
 Reznik E. 265
 Rine D.C. 9, 307
 Rius M. 145-146
 Robinson T.T. 34
 Rodriguez A.J. 223, 225
 Romanowska A. 225
 Rose A. 8, 35, 96, 98, 198, 200,
 218, 233, 255, 294, 318, 334
 Rosenberg I. 186, 195, 198,
 202-203
 Rosenbloom P.C.
 Rosser J.B. 7, 36, 116, 118, 164,
 168, 197, 218, 221, 334
 Rousseau G. 120, 130, 132, 165,
 198
 Routley R. 82, 255, 305, 318
 Rozonoer L.I. 70
 Rudeanu S. 125
 Russell B. 22

- Rychkov S. 175
 Sacchetti L. 305
 Sadri F. 152
 Sain I. 108
 Salomaa A. 189, 262
 Saloni Z. 132
 Salzer G. 3, 165-166
 Sambin G. 344
 Sankappanavar H.P. 90, 94, 103, 105, 302-303
 Saouter Y. 179
 Sasao T. 9
 Scala H.J. 220, 273
 Scarpellini B. 220-221
 Schofield P. 198
 Schotch P.K. 265
 Schröter K. 164
 Schumann A. 263
 Schütte K. 74
 Schwarze M.G. 113, 116, 260
 Schweizer B. 285
 Scott D. 143, 295, 307-308
 Scroggs S.J. 216, 244, 246
 Seeskin K.R. 79, 138
 Segerberg K. 57, 242, 245, 247, 264
 Sembi B.S. 283
 Sengupta G. 296
 Sernadas C. 263
 Sessa S. 269
 Sette A.M. 75-77, 113, 157
 Shramko Y. 87, 152, 294, 300-301, 304, 319
 Sicoe C.O. 125
 Simons P. 10
 Simovici D. 130
 Sinott-Armstrong W. 83
 Sklar A. 285
 Skvortsov D.P. 33, 175, 234
 Skyrms B. 81
 Slaney J. 251, 335, 337-338
 Shupecki E. 43, 45, 47, 189
 Slutzki G. 151
 Smiley T. 137, 308
 Smith K.C. 9
 Smullyan R.M. 165
 Soames S. 160
 Sobociński B. 71, 134, 140, 164, 254, 328
 Solovay R.M. 243
 Sonobe O. 234
 Spada L. 221
 Spencer J.H. 240
 Stachniak Z. 9
 Stojmenović I. 199, 202-203
 Stone M.H. 103
 Strauch B. 204
 Strawson P.F. 79
 Suchoń W. 123
 Sugihara T. 252
 Suppes P. 80
 Surma S.J. 98, 165
 Suszko R. 90, 92, 300, 303
 Sutara S. 296
 Swierckowski S. 201
 Swirydowicz K. 250
 Takahashi M. 120, 165, 219
 Takagi N. 117
 Takamura H. 292
 Takenaka T. 319
 Takeuti G. 234, 279
 Tamburino J. 70
 Tanaka S. 152, 224-225, 276, 279-280, 331
 Tardos G. 201
 Tarski A. 18, 22, 26, 35, 87, 89-91, 115, 117, 120, 163, 217, 218, 242, 245, 330
 Thibau V. 81
 Thomas I. 122, 328
 Thomason S. K. 265
 Thornton M.A. 9
 Titani S. 234, 279
 Tokarz M. 119-120, 253
 Törnebohm H. 80
 Torrens A. 120, 223, 289, 305

- Traczyk T. 130, 225
 Trillas E. 217, 286
 Tsuji M. 300-301
 Turing A. 31
 Turquette A. 7, 116, 118, 125,
 164, 168, 197, 342
 Turunen E. 285
 Tuziak R. 119, 133

 Ulrich D. 333, 340
 Umezawa T. 232
 Urbas I. 266-267
 Urquhart A. 8, 61, 115-116, 120,
 210, 219, 251-252, 265, 294,
 305, 308, 311

 Vakarelov D. 261
 Valverde L. 217, 286
 Van Benthem J.A.F.K. 246
 Van Dalen D. 228
 Van Fraassen B. 33, 79
 Van Pelt M. 269
 Varlet J. 111
 Vasyukov V.L. 317
 Verdú V. 120, 305
 Vetterlein T. 290
 Visser A. 160, 234
 Voutsadakis G. 151
 Wajsberg M. 41, 94, 117, 163,
 218, 325, 331, 342
 Walker C. 277-279, 293
 Walker E. 269, 277-279, 293
 Wallace J. 251
 Wang Hao 145
 Wang X. 145, 269

 Wansing H. 87, 294, 300, 304
 Ward M. 287
 Weaver G. 41
 Webb D.L. 180
 Weselkamper T. 9
 Wheeler R.F. 198
 Whitehead A. 22
 Williamson J. 164
 Wirsing M. 319
 Wójcicki R. 90, 92, 127, 304
 Wojtylak P. 176
 Wolf R.G. 8
 Wolter F. 246, 248, 265
 Woodruff P.W. 47, 160
 Wozniakowska B. 334
 Wright G.H., von 146-147
 Wroński A. 8, 224, 230

 Yager R.R. 269
 Yamada C. 264
 Yuan B. 269, 283
 Yutani H. 224

 Zabel N. 265
 Zach R. 8, 120, 165, 230, 234
 Zachorowski S. 252
 Zadeh L.A. 220, 268, 276-277,
 279, 284
 Zaitsev D. 299, 319
 Zakharyascnev M. 232, 242,
 246-248, 265
 Zawirski Z. 79
 Zeman J.J. 134, 140
 Zimmermann H.-J. 269
 Zygmunt Y. 90

Предметный указатель

- Абелева группа 222
 Адекватность 21, 157, 163
 Аксиома 19, 89
 неорганическая 332
 Алгебра
 Брауэра 104, 247
 дважды 105
 Буля 102, 225, 311
 Гейтинга 104, 247
 дважды 105, 111
 симметрическая 105, 111
 порядка n 123
 Гёделя G 233, 288
 Де Моргана 101, 111, 278
 булева 159
 дискретная эпистемическая 137
 квази-булева 101
 классических истинностных значений 102
 Клини 101, 272
 некоммутативная 106, 113
 Линденбаума 107, 260
 Лукасевича 123
 собственно 126
 Лукасевича-Мойсила 125
 нечеткая (типа 1) 272
 нечеткая (типа 2) 277, 280
 подмножеств 102
 полубулева 105
 Поста 130-131
 итеративная 184
 псевдобулева 104
 Скулема 105
 формул 93, 107

 функций 184
 r -алгебра 105
 дважды 105, 111
 дуальная 105
 промежуточная 106, 112
 слабая 106
 $AF C^*$
 B_3 112
 Bg 159
 BCK 224
 BL 288
 $BZMV^{dm}$
 CN 223
 E_3 112
 HW 237
 L 233, 321
 LB 321
 LH 321
 E_3 111
 MB 159
 MV 221, 288
 линейная 223
 некоммутативная 226
 непредставимая 318
 MV^*
 MV_n 222
 MV_Δ 237
 P 322
 SHW 235
 SMV 238
 TMA 146
 W 223
 WH 236
 Π 288

 Бесконечнозначные логики
 Гёделя G_χ 233, 244, 287, 290
 кванторная QG_χ 234, 287
 интуиционистская Int 48, 98, 216, 227-232, 292
 Лукасевича L_χ 66, 217, 233, 235, 244, 287, 290, 305, 342
 кванторная $\forall L_\chi$ 220

B 344
 BL 289
 BLV 291
 C₁ 109, 258-259
 C_ω 256
 E 109, 249-252
 E_{fdc} 141, 144
 FL 344
 FL_{ew} 292
 G_ω^{*} 267
 GBL 153
 GBL₃ 154
 GL 243, 245
 GRA 250
 Grz 243, 247
 H-B 237
 HWL 238
 Int⁺ 256
 J 256, 267
 K 242, 246, 265
 K4 242, 244, 246
 KC 232
 LC 122, 233, 323
 LJ 292
 L[°] 221
 L* 226
 L_Σ 226, 244, 261, 317-318
 L_Δ 238
 LG_x 236
 LG_∞^{*} 240
 ML 292
 MTL 291
 PI 256
 Q 264
 R 109, 249-252
 RA 250
 RM 252
 RM_{→,~} 254
 RPL 293
 S_N 240
 S_[N] 240
 S3 241

S4 243, 246-247, 265
 S5 47, 216, 243, 246-247, 265
 SL 232
 V1 140
 Π 287, 290
 Π' 249

Бирешетка 150, 153
 классическая 154
 логическая 153
 сплетенная 152

Бифильтр 153
 Будущие случайные события 36,
 38, 40

Гиперсеквенции 165, 254

Дедукции теорема 21, 28, 43
 Доказательство 20
 Дополнение 102
 ДСМ-метод 32, 175, 282

Законы логики высказываний
 двойного отрицания 14, 48,
 104, 227
 Де Моргана 70, 230, 257

Дунса Скота 14, 48, 69, 75-76,
 228, 256-257, 259

исключенного третьего 13,
 39, 42, 104, 227, 256, 266

Клини 101, 106
 переставленный 106
 контрапозиции 14, 57
 линейности 233, 254, 257
 (не)противоречия 13, 75
 обратной контрапозиции 22
 перестановки 14, 326
 Пирса 14, 70, 256, 324
 самодистрибутивности 14, 21
 сильной транзитивности 14
 сокращения 14, 42, 149, 175,
 326
 тождества 16, 326, 336

- транзитивности
 - сильный 14
 - слабый 326
- утверждения консеквента 14, 21, 71, 326
- Замкнутый класс функций 183
 - базис 183, 200
 - минимальный 184
 - ранг 184, 202
 - счетный 200
 - глубина 202
 - континуум 201, 203, 303
 - полный 186
 - предполный (максимальный) 45, 190, 201, 209
 - субмаксимальный 202
- Изоморф C_2
 - нормальный 52, 176, 206
 - обобщенный 55
- Импликативные логики 326
 - BCI 330
 - $BCIX_2$ 334
 - $BCIX_4$ 337
 - BCK 224, 234, 330
 - $BCKD$ 334
 - $BCKX_2$ 334
 - E_{\rightarrow} 250, 340
 - IB 329
 - $IBSK_1$ 330
 - H_{\rightarrow} 109, 325
 - $L_{\infty \rightarrow}$ 334, 337
 - R_{\rightarrow} 249, 330
 - $R_{\rightarrow} + X_2$ 334
 - RM_{\rightarrow} 255, 338
 - $RM0_{\rightarrow}$ 255
 - $S_{3 \rightarrow}$ 255
 - $S4_{\rightarrow}$ 340
 - $S5_{\rightarrow}$ 340
 - TV_{\rightarrow} 109, 330
- Интерполяция 160, 251-252
- Истинностные значения 12, 87, 320, 323
- абстрактные объекты 296
- алгебраические 303
- антивыделенное 87
- выделенное 34, 87
- логические 303
- модализованные 298
- обобщенные 319
- подмножества $\{T, F\}$ 318
- подмножества из B^s
- степени заблуждения 307
- степени истинности 295, 303
- тип 82
- третье 38, 40, 297
 - возможно 40
 - бессмыслица 50
 - неизвестно 58
 - не определено 44, 58, 80
 - противоречиво 69
- Истинностные таблицы 12
- Исчисление
 - гильбертовское 20, 89, 110
 - максимальное 71, 76
- Квази-решетка 100, 112-113, 167, 277, 280
- Классы Поста 102
- Клон 194, 202
- Комбинаторы 325
- Конвенция Тарского 38, 135, 136, 160
- Конечнозначные логики ($n > 4$)
 - B_n 133
 - G_n 122, 131, 229, 232
 - I^n 267
 - K_n 115, 313
 - K_{n+1} 211
 - K'_{n+1} 211
 - L_n 114, 117, 196, 209, 218-220, 265, 301, 308, 313
 - P^n 267
 - P_n 128, 193, 200
 - $PCont$ 133
 - T_n 167, 196, 209
 - T_n^* 196, 315

Конфляция 151-152, 161
Континуум
 классов функций 201, 203
 логик 232, 243, 245, 338
Критерий
 релевантности 248, 255
 Мак-Нотона 117, 219

Логика
 абстрактная 92
 алгебраизуемая 109
 базисная 72
 девиантная 83
 дополнительности 80
 истинностно-полная 167
 С-расширяющая 91, 167
 комбинированная 263
 неархимедова 262
 нечеткая 271, 282, 284
 нечеткозначная 274
 неразрешимая 31
 однозначная 304
 протоалгебраизуемая 108
 предтабличная 244
 разрешимая 14
 табличная 244
 финитарная 109
 финитно-аппроксимируемая
 98, 245
 финитно-тривиализируемая
 257
 хорошо кванторизуемая 168

Логическая матрица 87
 нормальная 91, 163, 327
 обобщенная 92, 304
 характеристическая 55, 91,
 110, 260
 С-расширяющая 44, 91

Логические связки 11
 внешние 52
 внутренние 51
 сильные 59
 слабые 61
 регулярные 58, 62

Логический фатализм 37, 135
Логическое следование 18, 61, 144,
 153
 первой ступени 141, 152, 299
 структурное 91

Моноид
 абелев 222
 Де Моргана 251
 идемпотентный 253
Монотонность 62

Независимость аксиом 33, 327
Непротиворечивость 21
Нечеткие подмножества 271
 типа 2 276, 282
Нечеткие числа 279

Оператор
 замыкания 89, 182, 303
 S-замыкания 207

Операция
 присоединения следствий 90,
 247
 структурная 90, 301
 покомпонентная 94, 309

Отделимость связок 325

Оценка 88
 алгебраическая 300
 логическая 300

Парадоксы
 материальной импликации
 241, 252
 строгой импликации 248

Полином Жегалкина 17, 184, 191,
 200

Полнота
 дедуктивная 22
 комбинаторная 325
 функциональная 15, 186
 критерий 190

Правила вывода 15, 19, 88
 адьюнкции 249

- Гёделя 242
 дизъюнктивного силлогизма 250
 композиции 283
 обобщения 28
 отделения (modus ponens) 15, 19, 53, 89, 286
 подстановки 15, 19, 89-90
 сохранять тавтологию 21, 33, 60, 69, 91
 эквивалентной замены 15, 74, 259
- Принцип
 двужначности
 (бивалентности)
 12, 36, 40, 80, 162
 обобщения 276
 необходимости 36, 135, 161
 тождества 217
 экстенциональности 12, 303
- Произведение матриц 93
 подпрямое 94
- Простое число 120, 209, 211
 классы 213
- Псевдодополнение 103
 дуальное 105
 относительное 103
- Разрешающая процедура 14
- Резидуал 104, 149, 286
- Решетка 100
 аппроксимационная 143
 Де Моргана 101, 144-145
 дистрибутивная 100
 имплицативная 104
 Де Моргана 140
 Клини 101, 145
 логик 246-248
 имплицативных 329, 334, 338, 341
 логическая 143
 интенциональная 240
 ограниченная 101
- паралогик 73
 полная 100, 161
 промежуточная 106
 расширений C_4 139
 расширений K_3^w 85
 резидуированная 287
 делимая 288
 предлинейная 288
si-логик 232
- СДНФ 16, 184, 186, 209
- Семантика
 алгебраическая 108
 бивалентная 300
 биоценок 305
 возможной переводимости 260, 302
 Крипке 230, 265-267
 для L_n 305
 тернарная 251
 для L_k 317
 матричная 92-93
 неистинностно-функциональная 259, 301-302
 оценок 259, 305
- Сопряженная пара 286
- Сохранение предиката 192
- Стрелка Пирса 18, 78
- Суперпозиция 181, 182
- Схема аксиом 19, 89
- Тавтология 15, 88
- Тавтологическое следование 141, 152
- Теорема 20
- Трехзначные логики
 Бочвара B_3 50, 205, 265
 внешние связи 52-53
 внутренние связи 51, 112
- Брауэра G_3^* 49, 266
- Гейтинга G_3 48-49, 93, 203, 228, 232, 266

естественные 83
 регулярные логики Клини
 сильная K_3 47, 55, 59, 81,
 112, 160
 слабая K_3^W 61, 81, 112, 264
 промежуточная K_3^{\rightarrow} 64, 81
 Лукасевича L_3 41, 47, 193,
 196, 218, 265, 300
 модальная 46
 Поста P_3 129, 192, 202
 Приста LP 69
 Розоноза $PCont$ 70, 133, 267
 Сетте P^1 75, 133, 258, 266,
 267
 Собочиньского S_3 70, 254
 Холдена H_3 57, 205
 Эббингауза E_3 58, 86
 B_3^T 56
 B_3^{\square} 52, 77
 B_3^{\diamond} 54, 77
 BL 44
 $CluNs$ 74
 F 75
 I^1 77, 266
 I^2 77
 J_3 74, 267
 $L_{c,3}$ 80
 $L_{c,3}^P$ 80
 L_3^2 60, 74
 L_3^q 314
 L_3^T 45, 91
 LAP 77
 $LFI1$ 74
 $LISP$ 63, 81, 113
 LP 69
 LPF 44, 82
 p -логика 67
 дважды 67
 дуальная 67
 промежуточная 67, 112

 слабая 68, 112
 P^2 76
 $PComp$ 73
 PI^s 70
 $RM3$ 71
 RM_3^{\supset} 70
 T^L, T^2, T^3 85
 $T^{\#}$ 86
 $V1$ 76, 133
 W 56
 Z 72
 Φ_v 74
 Тезис Сушко 300
 Т-норма 283, 285
 λ -непрерывная 286
 непрерывная 286

 Функциональная система 182
 Функциональная эквивалентность
 44
 Функция
 булева 13, 179
 В-ебба 180, 189
 равнозначная 189
 Слупецкого 189, 198
 существенная 189
 Шеффера (штрих) 18, 178,
 197, 230
 для B_3 79
 для C_2 18
 для G_3 78
 для L_n 199
 для K'_{n+1} 212
 для P_n 198
 для P_{N_0} 262
 для простых чисел 212

 Четырехзначные логики
 AVP 157
 A_4 156
 $B4$ 156
 $BD4$ 156

BDM4 155
 BL 44
 BL(4) 155
 BN4 148, 154
 C₄ 95, 140, 158
 D4 155
 DM4 144, 155, 158
 DMB4 156, 159
 FL4 147, 158
 K4(S) 140, 147
 K4'(S) 140
 L₄ 155
 LPF 44
 L₄ 112, 140, 147
 L-модальная 136, 140
 L+e₁ 139

L+e₂ 139
 P₄ 140, 193
 P² 157
 P₄¹ 156
 Par 73, 149, 154
 T'' 147, 158-159, 167
 TML 145
 Tr 158-159
 V2 134, 140, 146, 158

Эндоморфизмы 90, 139, 146

Язык

пропозициональный 11
 логики предикатов 24

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. Классическая логика	11
1.1 Логические связки. Истинностные таблицы	11
1.2. Законы логики высказываний	13
1.3. Функциональная полнота. СДНФ	15
1.3.1. Полиномы Жегалкина	16
1.3.2. Штрих Шеффера	17
1.4. Логическое следование. Аксиоматизация. Адекватность ..	18
1.5. Историческая справка	22
1.6. Логика предикатов	23
1.6.1. Язык логики предикатов	23
1.6.2. Интерпретация и аксиоматизация	25
1.6.3. Основные свойства: полнота, теорема Линдстрёма, неразрешимость	29
2. Интуитивное понимание многозначной логики и ее возникновение	32
2.1. Интуитивное понимание многозначной логики	32
2.2. Источники многозначности в логике	32
2.3. Доказательство независимости аксиом	33
2.4. Аристотелевский фаталистический аргумент	36
2.5. Предыстория появления многозначной логики	38
3. Трехзначные логики	40
3.1. Трехзначная логика Лукасевича \mathbf{L}_3	40
3.1.1. Отличия трехзначной логики Лукасевича \mathbf{L}_3 от классической \mathbf{C}_2	42
3.1.2. Трехзначная модальная логика Лукасевича	45
3.2. Трехзначная логика Гейтинга \mathbf{G}_3	48
3.2.1. Трехзначная логика Брауэра \mathbf{G}_3^* (дуальная к \mathbf{G}_3)	49
3.2.2. Взаимоотношение \mathbf{G}_3 с \mathbf{L}_3	50
3.3. Трехзначная логика Бочвара \mathbf{B}_3	50
3.3.1. Два уровня \mathbf{B}_3 : внешние логические связки	51
3.3.1.1. Трехзначные изоморфы \mathbf{C}_2	53
3.3.2. Аксиоматизация \mathbf{B}_3	55
3.3.3. Логика Холдена \mathbf{H}_3 и логика Эббингауза \mathbf{E}_3	57
3.4. Трехзначные (регулярные) логики Клини	58
3.4.1. Сильная логика Клини \mathbf{K}_3	58

3.4.2.	Слабая логика Клини K_3^w	61
3.4.3.	Регулярность и монотонность	62
3.4.4.	Промежуточная логика Клини K_3^{\rightarrow} (логика Lisp)	63
3.4.4.1.	Промежуточная логика Клини K_3^{\leftarrow} (логика Twin Lisp) ..	64
3.4.5.	Взаимоотношения между регулярными логиками Клини	65
3.4.6.	P -логики	67
3.5.	Трехзначные паранепротиворечивые логики	68
3.5.1.	Логика Приста LP	69
3.5.2.	Логика PCont	70
3.5.2.1.	Логика PCont как RM3	71
3.5.2.2.	Решетка паралогик	72
3.5.3.	Логика J_3	73
3.5.4.	Логики P^1 и P^2	75
3.5.4.1.	Параполные логики I^1 и I^2 , дуальные к P^1 и P^2	77
3.6.	Штрих Шеффера для некоторых трехзначных логик	77
3.7.	Некоторые применения	79
3.8.	Общие вопросы	81
3.9.	Решетка импликативных расширений регулярных логик Клини	83
4.	Логические матрицы и решетки	87
4.1.	Понятие логической матрицы	87
4.2.	Основные свойства логических матриц	88
4.3.	Операции над матрицами	93
4.3.1.	Прямое произведение матрицы M_2^c на саму себя	94
4.3.2.	Другие операции. Финитная аппроксимируемость	96
4.4.	Понятие решетки. Основные свойства	99
4.4.1.	Булевы алгебры	102
4.4.2.	Другие "логические" алгебры	103
4.5.	Алгебраическая семантика	106
4.5.1.	Алгебраизация L_3	110
4.5.2.	Алгебраизация некоторых других трехзначных логик	112
5.	Конечнозначные логики	114
5.1.	Конечнозначные логики Лукасевича L_n	114
5.1.1.	Матричная логика L_n	114
5.1.2.	Отношения между конечнозначными логиками L_n	115
5.1.3.	J -операторы	116
5.1.4.	Оператор Слупецкого для L_n	116
5.1.5.	Критерий Мак-Нотона выразимости операций в L_n	117
5.1.6.	Аксиоматизация L_n	117

5.1.7.	Кардинальная степень полноты \mathbf{L}_n	120
5.1.8.	\mathbf{L}_n и n -значные логики Гёделя \mathbf{G}_n	121
5.1.9.	Алгебраизация \mathbf{L}_n	123
5.2.	Логики Поста \mathbf{P}_n	127
5.2.1.	Матричные логики \mathbf{P}_n	127
5.2.1.1.	Трехзначная логика Поста \mathbf{P}_3	128
5.2.2.	Алгебры Поста	129
5.2.3.	Аксиоматизация логик \mathbf{P}_n	131
5.3.	Другие конечнозначные логики	132
5.4.	Четырехзначные логики	133
5.4.1.	Вводные замечания	134
5.4.2.	\mathbf{L} -модальная логика Лукасевича	135
5.4.3.	Решетка расширений четырехзначной классической логики \mathbf{C}_4	138
5.4.3.1.	Модальная логика $\mathbf{V2}$	140
5.4.4.	Логика Белнапа $\mathbf{DM4}$	141
5.4.4.1.	Логика $\mathbf{DM4}$ с модальными операторами	145
5.4.4.2.	Логика $\mathbf{DM4}$ с эндоморфизмами	146
5.4.4.3.	Логика $\mathbf{DM4}$ с импликацией	148
5.4.4.4.	Бирешетки	150
5.4.4.4.1.	Логическая бирешетка: импликация и классическое отрицание	153
5.4.5.	Другие четырехзначные логики	156
5.4.6.	«Логика истинности» \mathbf{Tr} и фаталистический аргумент Аристотеля	158
5.4.6.1.	Логика \mathbf{Tr}	158
5.4.6.1.1.	Аксиоматизация логики \mathbf{Tr}	159
5.4.6.2.	Логика \mathbf{Tr} и аксиоматические теории истины	160
5.4.6.3.	Конвенция Тарского и логический фатализм	161
6.	Аксиоматизация конечнозначных логик	163
6.1.	Предыстория	163
6.2.	Другие методы аксиоматизации	164
6.3.	Метод Аншакова–Рычкова	164
6.3.1.	Предварительные замечания	166
6.3.2.	Аксиоматизация	168
6.3.2.1.	Синтаксис	168
6.3.2.2.	Семантика	172
6.3.3.	Обобщение и другие вопросы	173
6.4.	Некоторые размышления	175

7. Многозначная логика как функциональная система	178
7.1. Формульная модель n -значной логики	178
7.1.1. Понятие функции n -значной логики. Элементарные функции	178
7.1.2. Формулы как суперпозиция элементарных функций ...	180
7.2. Алгебра функций	182
7.2.1. Оператор замыкания, замкнутые классы и базисы	182
7.2.1. Классы Поста	185
7.3. Проблема функциональной полноты	185
7.3.1. Примеры функционально полных систем	186
7.3.2. Признаки функциональной полноты и неполноты	189
7.3.3. Критерий функциональной полноты. Предполнота	190
7.3.3.1. Предполные классы в P_2 и P_3	191
7.3.3.2. Предполные классы в P_n	193
7.3.3.2.1. «Максимальный» предполный класс и его базис	195
7.3.4. Функции Шеффера	197
7.3.4.1. Функция Шеффера для E_n	199
7.4. Принципиальные отличия многозначной логики от двузначной. Континуальность	200
7.5. Трехзначные логики: функциональные свойства	201
7.5.1. Классы функций и базисы для P_3	202
7.5.2. Субмаксимальные клоны	202
7.5.3. Функциональные свойства B_3	205
7.5.3.1. Гипотеза о критерии континуальности трехзначных логик.....	207
7.5.4. S -классификация	207
7.6. Логика Лукасевича E_n и простые числа	207
7.6.1. Функциональные свойства E_n (теорема В.К. Финна)	208
7.6.2. Матричная логика для простых чисел	210
7.6.3. Алгоритм порождения классов простых чисел	213
8. Бесконечнозначные логики	216
8.1. Бесконечнозначная логика Лукасевича E_∞	216
8.1.1. Алгебраизация E_∞	221
8.1.2. Изменение множества истинностных значений	226
8.2. Интуиционистская логика Int и класс суперинтуиционистских логик	227
8.2.1. Появление Int	227
8.2.2. Основные свойства Int	228
8.2.2.1. Философская интерпретация Int (семантика возможных миров)	230

8.2.3.	Суперинтуиционистские логики	232
8.2.3.1.	Логика Гёделя–Даммита G_{∞}	233
8.3.	Синтез логик L_{∞} и G_{∞}	234
8.3.1.	Симметрический моноид Гейтинга SHM и алгебра Вайсберга–Гейтинга WH	235
8.3.1.1.	Алгебры, эквивалентные с WH	237
8.3.2.	Логика без неподвижных точек LG_{∞}^*	239
8.4.	Модальные логики	241
8.4.1.	К.И. Льюис и К. Гёдель	241
8.4.2.	Некоторые модальные логики	242
8.4.2.1.	Табличность и предтабличность	244
8.4.3.	Шкалы Крипке и принцип соответствия	245
8.4.4.	Важное отступление	246
8.5.	Релевантные логики	248
8.5.1.	Критерий релевантности и логика R	248
8.5.2.	Некоторые необычные свойства	251
8.5.3.	Логика RM	252
8.5.3.1.	Логики $RM_{\rightarrow, \sim}$ и RM_{\rightarrow}	254
8.6.	Паранепротиворечивая логика C_{ω} и иерархия ее расширений	255
8.6.1.	Логика C_{ω} и ее свойства	256
8.6.2.	Иерархия паранепротиворечивых систем C_n	257
8.6.3.	Неистинностно-функциональная семантика для паранепротиворечивых логик	258
8.6.3.1.	Неалгебраизуемость C_1	259
8.7.	Другие бесконечнозначные логики	260
8.7.1.	Обобщение логики Поста P_n	261
8.7.2.	Предельные и непрерывные логики	261
8.7.2.1.	Неархимедова логическая многозначность	262
8.7.3.	Логики со свойствами других логик	263
8.7.3.1.	Многозначные модальные логики	264
8.7.4.	Дуальность интуиционистских и паранепротиворечивых логик	266
9.	Теория нечетких множеств и нечеткие логики	268
9.1.	Преамбула	268
9.2.	Нечеткие множества и соответствующая логика	270
9.3.	Вторая стадия фазификации	274
9.3.1.	Нечеткие подмножества типа 2	276
9.3.1.1.	Ограничения и упрощения	277
9.3.1.2.	Иерархия минимальных моделей для нечетких алгебр типа 2	280
9.3.2.	На пути к нечеткой логике	282

9.4.	Логики, основанные на t -нормах	285
9.4.1.	T -нормы	285
9.4.2.	Семантический подход	287
9.4.3.	Базисная нечеткая логика BL и ее расширения	289
9.4.3.1.	Базисная нечеткая логика предикатов $BL\forall$	290
9.4.4.	Моноидная логика, основанная на t -норме	291
9.4.5.	Расширения t -логик новыми связками и другие вопросы	293
10.	Истинностные значения: Интерпретация многозначных логик	294
10.1.	Фиксация проблемы	294
10.2.	Логический мир Г. Фреге: два истинностных значения	296
10.3.	Другие логические миры	297
10.4.	Тезис Сушко	300
10.5.	Интуитивная интерпретация L_n . Проблемы	305
10.6.	T - F -последовательности в качестве истинностных значений	309
10.7.	Фактор-семантика: подмножества <i>versus</i> элементы	311
10.7.1.	Фактор-семантика для бесконечнозначной логики L_Σ	315
10.8.	Структуризация истинностных значений	318
Приложение:	Булевы решетки импликативных логик	324
1.	Проблема классификации импликативных логик. Комбинаторы	324
2.	Решетка импликативных логик $L(H_\rightarrow)$	326
3.	Решетка импликативных логик $L(TV_\rightarrow)$: классические версии BCI , BCK и R_\rightarrow	330
4.	Максимальная решетка $L(TV_\rightarrow)$: логики RM_\rightarrow и $L_{\infty\rightarrow}$	335
5.	Решетка импликативных логик $L(TV_\rightarrow)$: логики E_\rightarrow , $S4_\rightarrow$ и $S5_\rightarrow$	340
6.	Некоторые полные пропозициональные логики	341
7.	Несколько замечаний о классификации логик	343
	ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА	346
	ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	416
	ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	426
	CONTENTS	439

CONTENTS

PREFACE	3
1. Classical logic	11
1.1 Logical connectives. Truth-tables	11
1.2. The laws of propositional logic	13
1.3. Functional completeness. Full disjunctive normal form	15
1.3.1. Zhegalkin polynomials.....	16
1.3.2. Sheffer stroke	17
1.4. Logical entailment. Axiomatization. Adequacy	18
1.5. Historical note	22
1.6. First-order predicate logic	23
1.6.1. The language of predicate logic	23
1.6.2. Interpretation and axiomatization	25
1.6.3. The basic properties: completeness, Lindström's theorem, unsolvability	29
2. Intuitive understanding of many-valued logic and its appearance	32
2.1. Intuitive understanding of many-valued logic	32
2.2. Sources of many-valuedness in logic	32
2.3. The proof of independence of axioms	33
2.4. Aristotle's fatalistic argument	36
2.5. Prehistory of appearance of many-valued logic	38
3. Three-valued logics	40
3.1. Łukasiewicz's three-valued logic \mathbf{L}_3	40
3.1.1. Distinctions of \mathbf{L}_3 from classical two-valued logic \mathbf{C}_2	42
3.1.2. Łukasiewicz's three-valued modal logic	45
3.2. Heyting's three-valued logic \mathbf{G}_3	48
3.2.1. Brouwer's three-valued logic \mathbf{G}_3^* (dual to \mathbf{G}_3).....	49
3.2.2. Interrelation between \mathbf{G}_3 and \mathbf{L}_3	50
3.3. Bochvar's three-valued logic \mathbf{B}_3	50
3.3.1. Two levels of \mathbf{B}_3 : external logical connectives	51
3.3.1.1. Three-valued isomorphs of \mathbf{C}_2	53
3.3.2. Axiomatization of \mathbf{B}_3	55
3.3.3. Halldén's logic \mathbf{H}_3 и Ebbinghaus's logic \mathbf{E}_3	57

3.4.	Kleene's three-valued (regular) logics	58
3.4.1.	Kleene's strong logic K_3	58
3.4.2.	Kleene's weak logic K_3^w	61
3.4.3.	Regularity and monotonicity	62
3.4.4.	Intermediate Kleene's logic K_3^{\rightarrow} (logic Lisp)	63
3.4.4.1.	Intermediate Kleene's logic K_3^{\leftarrow} (logic Twin Lisp)	64
3.4.5.	Interrelations between Kleene's regular logics	65
3.4.6.	P -logics	67
3.5.	Three-valued paraconsistent logics	68
3.5.1.	Priest's logic LP	69
3.5.2.	Logic PCont	70
3.5.2.1.	Logic PCont as RM3	71
3.5.2.2.	Lattice of paralogsics	72
3.5.3.	Logic J_3	73
3.5.4.	Logic P^1 and P^2	75
3.5.4.1.	Paracomplete logics I^1 and I^2 dual to P^1 and P^2	77
3.6.	Sheffer's stroke for some three-valued logics	77
3.7.	Some applications	79
3.8.	General questions	81
3.9.	The lattice of implicative extensions of Kleene's regular logic	83
4.	Logical matrices and lattices	87
4.1.	The notion of logical matrix	87
4.2.	Basic properties of logical matrices	88
4.3.	Operations over the matrices	93
4.3.1.	Direct product of matrix for \mathfrak{M}_2^c with itself	94
4.3.2.	Other operations. Finite approximation	96
4.4.	The notion of lattice. Basic properties	99
4.4.1.	Boolean algebras	102
4.4.2.	Other "logical" algebras	103
4.5.	Algebraic semantics	106
4.5.1.	Algebraization of L_3	110
4.5.2.	Algebraization of some other three-valued logics	112
5.	Finite-valued logics	114
5.1.	Łukasiewicz's finite-valued logics L_n	114
5.1.1.	Matrix logics L_n	114
5.1.2.	Interrelations between finite-valued logics L_n	115
5.1.3.	J_T -operators	116
5.1.4.	Shupecki's operators for L_n	116
5.1.5.	McNaughton's criterion of function definability in L_n	117

5.1.6.	Axiomatization of \mathbf{L}_n	117
5.1.7.	Cardinal degree of completeness of \mathbf{L}_n	120
5.1.8.	\mathbf{L}_n and Gödel's n -valued logics \mathbf{G}_n	121
5.1.9.	Algebraization of \mathbf{L}_n	123
5.2.	Post's logics \mathbf{P}_n	127
5.2.1.	Matrix logic \mathbf{P}_n	127
5.2.1.1.	Post's three-valued logic \mathbf{P}_3	128
5.2.2.	Post's algebras	129
5.2.3.	Axiomatization of logics \mathbf{P}_n	131
5.3.	The other finite-valued logics	132
5.4.	Four-valued logics	133
5.4.1.	Introductory remarks	134
5.4.2.	\mathbf{L} -modal logic of Łukasiewicz	135
5.4.3.	The lattice of extensions of four-valued classical logic \mathbf{C}_4	138
5.4.3.1.	Modal logic $\mathbf{V2}$	140
5.4.4.	Belnap's logic $\mathbf{DM4}$	141
5.4.4.1.	Logic $\mathbf{DM4}$ with modal operators	145
5.4.4.2.	Logic $\mathbf{DM4}$ with endomorphisms	146
5.4.4.3.	Logic $\mathbf{DM4}$ with implication	148
5.4.4.4.	Bilattices	150
5.4.4.4.1.	Logical bilattice: implication and classical negation	153
5.4.5.	Others four-valued logics	156
5.4.6.	"Truth logic" \mathbf{Tr} and Aristotle's fatalistic argument	158
5.4.6.1.	Logic \mathbf{Tr}	158
5.4.6.1.1.	Axiomatization of logic \mathbf{Tr}	159
5.4.6.2.	Logic \mathbf{Tr} and axiomatic theories of truth	160
5.4.6.3.	Tarski's convention and logical fatalism	161
6.	Axiomatization of finite-valued logics	163
6.1.	Prehistory	163
6.2.	Others methods	164
6.3.	Anshakov-Rychkov's algorithm	164
6.3.1.	Preliminary remarks	166
6.3.2.	Axiomatization	168
6.3.2.1.	Syntax	168
6.3.2.2.	Semantics	172
6.3.3.	Generalization and others questions	173
6.4.	Some reflections	175

7. Many-valued logic as a functional system	178
7.1. Formulas model of n -valued logic	178
7.1.1. A notion of a function of n -valued logic.	
Initial functions	178
7.1.2. Formulae as superposition of initial functions	180
7.2. Function algebras	182
7.2.1. Close operation, closed classes and bases	182
7.2.1.1. Post's classes	185
7.3. The problem of functional completeness	185
7.3.1. Examples of functional complete systems	186
7.3.2. Indications of functional completeness and non-completeness	189
7.3.3. Criteria of functional completeness. Precompleteness	190
7.3.3.1. Precomplete classes in P_2 and P_3	191
7.3.3.2. Precomplete classes in P_n	193
7.3.3.2.1. "Maximal" precomplete classes and their bases	195
7.3.4. Sheffer functions	197
7.3.4.1. Sheffer function for L_n	199
7.4. The fundamental differences of many-valued logic from two-valued one. Continuity	200
7.5. Three-valued logics; functional properties	201
7.5.1. Classes of functions and bases for P_3	202
7.5.2. Submaximal clones	202
7.5.3. Functional properties of B_3	205
7.5.3.1. Hypothesis on criteria of continuity of three-valued logics	207
7.5.4. S -classification	207
7.6. Łukasiewicz's logics L_n and prime numbers	207
7.6.1. Functional properties of L_n (V.K. Finn's theorem)	208
7.6.2. Matrix logic for prime numbers	210
7.6.3. Algorithm for generation of classes of prime numbers	213
8. Infinite-valued logics	216
8.1. Łukasiewicz's infinite-valued logic L_∞	216
8.1.1. Algebraization of L_∞	221
8.1.2. Changing of the set of truth-values	226
8.2. Intuitionistic logic Int and the class of superintuitionistic logics	227
8.2.1. Appearance of Int	227
8.2.2. Basic properties of Int	228
8.2.2.1. Philosophical interpretation of Int (possible world semantics)	230

8.2.3.	Superintuitionistic logics	232
8.2.3.1.	Gödel–Dummett’s logic G_{∞}	233
8.3.	Synthesis of logics L_{∞} and G_{∞}	234
8.3.1.	Symmetrical Heyting’s monoid SHM and Wajsberg–Heyting algebra WH	235
8.3.1.1.	Algebras equivalent with WH	237
8.3.2.	Logic without fixed points LG_{∞}^*	239
8.4.	Modal logics	241
8.4.1.	C.I. Lewis and K. Gödel	241
8.4.2.	Some modal logics	242
8.4.2.1.	Tabularity and pretabularity	244
8.4.3.	Kripke frames and correspondence theory	245
8.4.4.	Important digression	246
8.5.	Relevance logics	248
8.5.1.	Variable sharing principle and logic R	248
8.5.2.	Some unusual properties	251
8.5.3.	Logic RM	252
8.5.3.1.	Logics $RM_{\rightarrow, \sim}$ and RM_{\rightarrow}	254
8.6.	Paraconsistent logic C_{ω} and hierarchy of its extensions	255
8.6.1.	Logic C_{ω} and its properties	256
8.6.2.	Hierarchy of paraconsistent systems C_n	257
8.6.3.	Non-truth-functional semantics for paraconsistent logics	258
8.6.3.1.	Non-algebraization of C_1	259
8.7.	Others infinite-valued logics	260
8.7.1.	Generalization of Post’s logic P_n	261
8.7.2.	Limited and continuous logics	261
8.7.2.1.	Non-Archimedean logical many-valuedness	262
8.7.3.	Logic with properties of other logics	263
8.7.3.1.	Many-valued modal logics	264
8.7.4.	Duality of intuitionistic and paraconsistent logics	266
9.	Fuzzy set theory and fuzzy logics	268
9.1.	Preamble	268
9.2.	Fuzzy sets and corresponding logic	270
9.3.	The second stage of fuzzification	274
9.3.1.	Fuzzy subsets of type 2	276
9.3.1.1.	Restrictions and simplifications	277
9.3.1.2.	Hierarchy of minimal models for fuzzy algebras of type 2	280
9.3.2.	On the way to fuzzy logic	282
9.4.	Logics based on t -norms	285

9.4.1. T-norms	285
9.4.2. Semantic approach	287
9.4.3. The basic fuzzy logic BL and its extensions	289
9.4.3.1. The basic fuzzy predicate logic BLV	290
9.4.4. Monoidal logic based on t-norm	291
9.4.5. Extensions of t-logics by new connectives and others questions	293
10. Truth-values: Interpretation of many-valued logics	294
10.1. Fixation of the problem	294
10.2. Frege's logical world: two truth-values	296
10.3. Others logical worlds	297
10.4. Suszko's thesis	300
10.5. Intuitive interpretation of \mathbf{L}_n . The problems	305
10.6. T-F-sequences as truth-values	309
10.7. Factor-semantics: subsets <i>versus</i> elements	311
10.7.1. Factor-semantics for infinite-valued logic \mathbf{L}_Σ	315
10.8. Structuralization of truth-values	318
Appendix: Boolean lattices of implicational logics	324
1. The problem of classification of implicational logics. Combinators	324
2. The lattice of implicational logics $L(H_\rightarrow)$	326
3. The lattice of implicational logics $L(TV_\rightarrow)$: classical versions of BCI , BCK and \mathbf{R}_\rightarrow	330
4. Maximal lattice $L(TV_\rightarrow)$: logics \mathbf{RM}_\rightarrow and $\mathbf{L}_{\infty\rightarrow}$	335
5. The lattice of implicational logics $L(TV_\rightarrow)$: logics \mathbf{E}_\rightarrow , $\mathbf{S4}_\rightarrow$ and $\mathbf{S5}_\rightarrow$	340
6. Some full propositional logics	341
7. Some remarks on classification of logics	343
REFERENCES	346
AUTHOR INDEX	416
SUBJECT INDEX	426